10.30497/IFR.2022.242022.1678 OPEN ACCESS 20.1001.1.22518290.1401.11.2.10.4

Bi-quarterly Scientific Journal of "Islam ic Finance Researches", Research Article,
Vol. 11, No. 2 (Serial 22), Spring & Summer 2022

Valuation of Ijarah Sukuk Based on Equity Using Stochastic Mathematics Method

Hasan Kiaee[*]
Mostafa Soltani[**]

Received: 20/10/2021
Accepted: 26/01/2022

Abstract

The issuance of *ijarah* sukuk based on equity is one of the achievements of the capital market and is in fact the second generation of *ijarah* sukuk based on financial assets. These securities are important because their underlying assets are transparent and tradable in the market, and their price can be measured continuously. Therefore, sukukholders should be able to enjoy their most important property rights, namely the transfer of sukuk at the current price, and changes in stock prices should also be considered. But unfortunately, what can be seen in the design and use of these sukuk is that there is no difference between the pricing of these sukuk and ordinary *ijarah* sukuk and the interest rate of these bonds is considered to be fixed and proportional to the bank interest rate. Therefore, considering the importance and position of this type of *ijarah* sukuk, the article uses a library method and refers to similar studies as well as a random mathematics method and Monte Carlo simulation to provide a proposed valuation model that considers changes in the base asset price and interest rate proportional to the stock income, and its simulation using an experimental sample. Finally, this is compared to the market prices and it is observed that the simulation prices using the proposed model are different from them. It can eventually be noted that, in regard to the research assumptions and our proposed model, the issuance of *ijarah* sukuk based on equity is closer to the country's desirable model and will be more in line with the Islamic economy.

Keywords:

Ijarah Sukuk; Equity; Valuation Model; Stochastic Mathematics; Monte Carlo.

JEL Classification: C12, C15, G23, G32, Z12.

[*] Assistant Professor, Faculty of Islamic Studies and Economics, Imam Sadiq University, Tehran, Iran. kiaee@isu.ac.ir 0000-0002-1816-9205

[**] M.A. in Islamic Studies and Economics, Islamic Studies and Economics Faculty, Imam Sadiq University, Tehran, Iran (Corresponding Author)
mo.soltani@isu.ac.ir 0002-0002-2092-0571

10.30497/IFR.2022.242022.1678 OPEN ACCESS 20.1001.1.22518290.1401.11.2.10.4
دو فصلنامه علمی «تحقیقات مالی اسلامی»، سال یازدهم، شماره دوم (پیاپی ۲۲)، بهار و تابستان ۱۴۰۱
مقاله پژوهشی، صص. ۸۰۴-۷۶۳

ارزش‌گذاری صکوک اجاره مبتنی‌بر سهام با استفاده از روش ریاضیات تصادفی

حسن کیایی *
مصطفی سلطانی **

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۰۶
مقاله برای اصلاح به مدت ۱۰ روز نزد نویسندگان بوده است.

چکیده

انتشار اوراق اجاره سهام یکی از دستاوردهای بازار سرمایه بوده و درواقع نسل دوم اوراق اجاره و مبتنی‌بر دارایی‌های مالی است. این اوراق ازاین‌جهت دارای اهمیت بوده که دارایی پایه آن شفاف و قابلیت مبادله در بازار دارد و قیمت آن به‌صورت مستمر قابل‌اندازه‌گیری است. بنابراین دارندگان اوراق باید بتوانند از مهم‌ترین حقوق مالکیتی خود، یعنی واگذاری اوراق به قیمت روز بهره‌مند شوند و تغییرات قیمت سهام نیز مدنظر قرار گیرد. اما متأسفانه آنچه در طراحی و به‌کارگیری این اوراق مشاهده می‌شود این است که تفاوتی در قیمت‌گذاری این اوراق با صکوک اجاره معمولی وجود ندارد و نرخ سود این اوراق نیز به‌صورت ثابت و متناسب با نرخ سود بانکی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین با توجه به اهمیت و جایگاه این نوع از اوراق اجاره، این مقاله با استفاده از روش کتابخانه‌ای و مراجعه به مطالعات مشابه و همچنین با استفاده از روش ریاضیات تصادفی و استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو به ارائه یک مدل پیشنهادی ارزش‌گذاری با درنظرگرفتن تغییرات قیمت دارایی پایه و نرخ سود متناسب با عایدی سهام و شبیه‌سازی آن با استفاده از یک نمونه تجربی می‌پردازد و درنهایت با قیمت‌های بازار مقایسه شده و مشاهده می‌شود که قیمت‌های شبیه‌سازی با استفاده از مدل پیشنهادی، با قیمت‌های بازار متفاوت است و درنهایت می‌توان اشاره کرد که انتشار اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام با درنظرگرفتن مفروضات پژوهش و ارائه این مدل پیشنهادی، به الگوی ایده‌آل و مطلوب کشور نزدیک‌تر بوده و همچنین مطابقت بیشتری با اقتصاد اسلامی نیز خواهد داشت.

واژگان کلیدی

صکوک اجاره؛ سهام؛ مدل ارزش‌گذاری؛ ریاضیات تصادفی؛ مونت‌کارلو.
طبقه‌بندی JEL: C12,C15, G23, G32, Z12.

---

* استادیار، دانشکده معارف اسلامی و اقتصاد، دانشگاه امام صادق علیه‌السلام، تهران ایران
0000-0002-1816-9205 kiaee@isu.ac.ir
** دانش‌آموخته کارشناسی ارشد معارف اسلامی و اقتصاد، دانشکده معارف اسلامی و اقتصاد، دانشگاه امام صادق علیه‌السلام، تهران ایران (نویسنده مسئول) 0000-0002-2092-0571 mo.soltani@isu.ac.ir

مقدمه

بحث اوراق اجاره سهام از بحث‌های جدید اوراق تأمین مالی به‌شمار می‌رود و با توجه به ویژگی‌هایی که دارد پیش‌بینی می‌شود استفاده از آن به‌سرعت توسعه پیدا کند و مزیت‌های متعددی نسبت به اوراق معمولی دارد. این اوراق از این جهت دارای اهمیت است که دارایی پایه آن شفاف و قابل‌مبادله در بازار است و قیمت آن به‌صورت مستمر قابل‌اندازه‌گیری است. پس دارندگان اوراق باید بتوانند از مهم‌ترین حقوق مالکیتی خود یعنی واگذاری اوراق به قیمت روز بهره‌مند شوند. اما متأسفانه آنچه در طراحی و به‌کارگیری این اوراق مشاهده می‌شود این است که تفاوتی در قیمت‌گذاری و فرایند مبادله این اوراق با اوراق صکوک معمولی وجود ندارد.

همان‌طور که اشاره شد، اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام، درواقع اوراقی است که دارایی پایه آن سهام است و ازاین‌جهت که دارایی پایه آن شفافیت دارد و قیمت آن به‌صورت روزانه در بازار مشخص است و نسبت به اوراق اجاره معمولی برتری دارد و لذا فرایند قیمت‌گذاری آن نیز شفافیت بیشتری نسبت به اوراق اجاره معمولی خواهد داشت. لذا با توجه به اینکه دارایی پایه این نوع از اوراق اجاره به‌صورت سهام است، سؤالی که به وجود می‌آید این است که آیا فرایند قیمت‌گذاری همانند قیمت‌گذاری اوراق اجاره معمولی است؟ درصورتی‌که پاسخ به این سؤال منفی باشد، چه فرایند جایگزینی را می‌توان برای ارزش‌گذاری این اوراق در نظر گرفت؟ در حال حاضر با توجه به شرایط فعلی انتشار این اوراق و علی‌رغم اهمیت و ماهیت و جایگاه این اوراق، می‌توان بیان کرد که فرایند و شیوه قیمت‌گذاری همانند قیمت‌گذاری اوراق اجاره معمولی است، درحالی‌که متفاوت هستند. در مدل پیشنهادی قصد داریم تا عملاً فرایند تصادفی تغییر قیمت اوراق را به تغییر قیمت سهام ارتباط دهیم که در واقعیت نیز باید به همین صورت باشد و افزایش یا کاهش قیمت سهم پایه نیز در افزایش یا کاهش قیمت اوراق تأثیرگذار باشد. نکته دیگری که وجود دارد، مربوط به نرخ اجاره‌بها یا نرخ سود اوراق

است و اینکه این نرخ برای انواع و اقسام سهام نباید ثابت باشد بلکه باید متناسب با عایدی سهام مورد اجاره درنظرگرفته شود. لذا جهت تعیین نرخ اجاره‌بها نیز می‌توان سازوکاری را در نظر گرفت تا نرخ اجاره متناسب با عایدی سهام مورد اجاره باشد.

با توجه به ماهیت اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام و اینکه دارایی پایه آن سهام است و تفاوت آن با اوراق اجاره معمولی در شرایط عملیاتی، این مقاله در نظر دارد تا در ابتدا به معرفی اجمالی از صکوک اجاره سهام و مفروضات پژوهش پرداخته و در ادامه به ارزیابی مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مرتبط با سهام و ارائه یک مدل پیشنهادی جهت ارزش‌گذاری و هم‌چنین شبیه‌سازی این اوراق با استفاده از یک نمونه تجربی می‌پردازیم.

۱. پیشینه تحقیق

اوراق اجاره سهام ازجمله بحث‌های جدید اوراق تأمین مالی به‌شمار می‌رود و با توجه به ویژگی‌هایی که دارد پیش‌بینی می‌شود استفاده از آن به‌سرعت توسعه یابد.

مالیر و آلوبیدی [۱] (۲۰۰۲) در مقاله‌ای با عنوان «قیمت‌گذاری بدهی مبتنی‌بر سهام با استفاده از مدل واسیچک»، بدهی مبتنی‌بر سهامی را در نظر گرفته‌اند که دارنده آن، هم پرداختی سود و هم پرداختی مربوط به عملکرد شاخص سهام را دریافت می‌کند. در این مقاله، نویسنده از رویکرد تابع گرین برای محاسبه ارزش چنین ابزاری استفاده می‌کند البته با فرض اینکه شاخص سهام از یک گام تصادفی[۲] تبعیت می‌کند و نرخ بهره بدون ریسک نیز توسط مدل واسیچک داده می‌شود. در ادامه به شیوه استفاده از آن پرداخته می‌شود.

وجدی دوسوکی [۳] (۲۰۱۰) در مقاله با عنوان «آیا اهداف شریعت در ساختار اوراق مبتنی‌بر سهام ظاهر و بازنمود می‌شود یا خیر؟»، بیان می‌کند که بازار سرمایه اسلامی، جزئی مهم در کل سیستم مالی اسلامی بوده و نقش مؤثری دارد. به عقیده وی، بازارهای سرمایه اسلامی همانند همتای متعارف خود یعنی بازارهای اسلامی متعارف،

نقش سرمایه‌گذاری بخش بانکداری اسلامی را در جمع‌آوری سرمایه برای سرمایه‌گذاری بلندمدت دارد و این سرمایه‌گذاری‌های بلندمدت از طریق قراردادها و ابزارهای مختلف شرعی تضمین می‌شوند. هدف این مقاله بررسی ساختار صکوک مبتنی‌بر حقوق صاحبان سهام است که امروزه یکی از محبوب‌ترین ابزارهایی است که در بازار سرمایه اسلامی مورداستفاده قرار می‌گیرد. این مقاله صرفاً به اوراق مضاربه و اوراق مشارکت می‌پردازد. در این مقاله به اوراق اجاره و ارزش‌گذاری اوراق، پرداخته نشده و و رویکرد متفاوتی دارد و صرفاً به اهمیتی که برای بازار سرمایه و سهام قائل شده می‌توان اشاره نمود.

صالح‌آبادی، میرطاهر، فدایی‌واحد و علی‌حسینی (۱۳۹۲) در مقاله‌ای با عنوان «مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مالی اسلامی اجاره»، علاوه‌بر تبیین تفاوت‌های میان اوراق قرضه و اوراق اجاره، ذکر می‌کنند که اعتبار اوراق اجاره برخلاف اوراق قرضه علاوه‌بر اعتبار ناشر به مؤلفه مهم دیگری به نام دارایی پایه نیز بستگی دارد و به همین دلیل با بالارفتن ارزش دارایی پایه، ارزش ورقه نیز افزایش پیدا می‌کند و همچنین در صورت کاهش ارزش دارایی پایه، ارزش ورقه نیز کاهش پیدا می‌کند. البته می‌توان ریسک کاهش ارزش دارایی پایه را با دادن اختیار فروش به خریدار اوراق از بین برد. همچنین در این مقاله به اهداف انتشار اوراق اجاره یعنی تأمین دارایی و تأمین نقدینگی و اوراق اجاره رهنی می‌پردازد. سپس با بیان جریان‌های نقدی دوره‌ای، هزینه کارمزد و مبادله‌ها و نرخ تنزیل به‌عنوان ارکان ارزش‌گذاری اوراق اجاره، ۴ مدل برای ارزش‌گذاری انواع اوراق اجاره ارائه می‌کنند: ***اول***: اوراق اجاره باقیمت ثابت از پیش تعیین‌شده؛ ***دوم***: اوراق اجاره با قیمت شناور بر اساس حرکت براونی (فرایند وینر)؛ ***سوم***: اوراق اجاره با اختیار فروش دارایی در سررسید برای سرمایه‌گذاران با قیمت ثابت؛ ***چهارم***: اوراق اجاره با اختیار فروش دارایی در سررسید برای سرمایه‌گذاران با قیمت شناور بر اساس حرکت براونی (فرایند وینر). لازم به ذکر است که در این مقاله

به ارزش‌گذاری صرف اوراق اجاره با اجاره‌بهای ثابت پرداخته و در خصوص اوراق اجاره‌ای که دارایی پایه آن سهام بوده صحبتی نشده و به‌تبع آن، در خصوص ارزش‌گذاری اوراق اجاره سهام نیز پژوهشی صورت نگرفته است.

عیسی و شفیع[۴] (۲۰۱۷م) در مقاله‌ای با عنوان «رویکرد تصادفی جهت تعیین نرخ سود محصولات تأمین مالی اسلامی»، قیمت دارایی را یک حرکت براونی[۱] استاندارد فرض کرده و تغییرات قیمت را در قالب یک معادله دیفرانسیل تصادفی بیان می‌کنند. در ادامه با تبدیل مدل به حرکت براونی هندسی (نمایی)، مدل را تکمیل می‌کنند و درنهایت پارامترها را تخمین می‌زنند.

اعتصامی و سعدی (۱۳۹۹) در مقاله‌ای با عنوان «امکان‌سنجی فقهی- حقوقی اجاره سهام و کاربردهای مالی آن»، به امکان‌سنجی فقهی- حقوقی اجاره سهام می‌پردازند. در همین راستا پس از بررسی ماهیت فقهی و حقوقی سهام، شروط عقد اجاره با ماهیت و ویژگی‌های سهام مورد تطبیق قرار گرفت. در این مقاله پس از بررسی فقهی- حقوقی به این نتیجه رسیده‌اند که تنها منافع منفصل سهام مانند سود تقسیمی با اجاره قابل انتقال است و سایر منافع مالکیتی، متصل به سهام و برای موجر است، درحالی‌که در مصوبه شورای فقهی بورس همه منافع به مستأجر منتقل می‌شود. در این مطالعه در خصوص مسائل ارزش‌گذاری اوراق اجاره سهام، پژوهشی صورت نگرفته است.

درنهایت باید اشاره کرد با وجود اینکه انتشار اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام در حال افزایش است و ماهیت این اوراق با توجه به داشتن دارایی پایه مالی و نه فیزیکی با اوراق صکوک معمولی متفاوت است، تاکنون پژوهشی پیرامون ارزش‌گذاری صکوک اجاره مبتنی‌بر سهام و همچنین استفاده از روش ریاضیات تصادفی صورت نگرفته و مقاله اعتصامی و سعدی (۱۳۹۹) تنها پژوهشی است که به این موضوع پرداخته که البته به امکان‌سنجی فقهی و اقتصادی آن اشاره می‌کند. از دیگر مقاله‌های مرتبط می‌توان به

---

[1] Brownian motion

مقاله شلدون‌لین و تان[۵] (۲۰۰۳) اشاره نمود که در مقاله خود به ارزش‌گذاری سنوات[۶] مبتنی‌بر سهام با در نظر گرفتن نرخ بهره تصادفی می‌پردازند که این مقاله نیز با موضوع موردبحث مرتبط است. اما با توجه به اینکه خواسته‌های ما از مقاله، شیوه ورود و استخراج معادله دیفرانسیل تصادفی است، لذا چندان استفاده ریاضیاتی نمی‌توان از آن داشته باشیم. برنان و زیا[۷] (۲۰۰۰) نیز در مقاله خود به بحث ترکیب سهام و اوراق قرضه می‌پردازد که تا حدودی با موضوع پژوهش مرتبط است. در خصوص این مقاله باید اضافه کنیم که آن چیزی که مدنظر است، به‌خوبی تبیین نشده و در خصوص معادله دیفرانسیل تصادفی و شیوه ورود متغیّرها صحبتی نشده است.

۲. صکوک اجاره مبتنی‌بر سهام

این ابزار جدید مالی یعنی اوراق اجاره سهام درواقع نسل دوم اوراق اجاره و مبتنی‌بر دارایی‌های مالی است. همان‌طور که در مقدمه بیان شد، اهمیت این اوراق از این جهت بوده که دارایی پایه آن شفاف و قابل‌مبادله در بازار است و قیمت آن به‌صورت مستمر قابل‌اندازه‌گیری است. پس صاحبان اوراق باید بتوانند از مهم‌ترین حقوق مالکیتی خود یعنی واگذاری اوراق به قیمت روز بهره‌مند شوند.

با توجه به ساختاری که در درون این اوراق وجود دارد، این اوراق کاربردهای متعددی جهت تأمین مالی دارد. درصورتی‌که نهادهای دولتی و غیردولتی یا شرکت‌ها و هلدینگ‌های مالی که سهام عمده شرکت‌ها را در اختیار دارند، قصد داشته باشند تا از طریق انتشار اوراق اجاره نسبت به تأمین مالی خود اقدام کنند. همچنین اگر دارایی‌های فیزیکی قابل اجاره آن‌ها نیاز مالی آن‌ها را تأمین نکند، می‌توانند سهام خود را دارایی پایه موضوع اجاره قرار دهند. با توجه به تبصره‌های ۳۶ و ۳۷ اصلاح قانون بودجه سال ۱۳۹۵ جمهوری اسلامی ایران که دولت جهت تأمین مالی خود می‌تواند اوراق بهادار اسلامی منتشر کند و نیز با توجه به محدودیت‌های دولت در انتقال دارایی‌های خود جهت انتشار اوراق اجاره، در خصوص استفاده دولت از صکوک معمولی با موانعی

روبرو است. بر اساس این کاربرد، دولت یا بخش خصوصی قادر است تا جهت تأمین مالی طرح‌ها، پروژه‌ها و بودجه‌های سنواتی خود ازجمله پرداخت‌های بدهی، از این اوراق استفاده کند. دولت صاحب سهام عمده برخی از شرکت‌های بزرگ است و به همین علت توانایی این را دارد که از ابزارهای تأمین مالی اسلامی جهت تأمین مالی خود استفاده کند. دولت برای تأمین کسری بودجه و یا تسویه دیون خود می‌تواند با انتشار اوراق اجاره سهام و کسب نقدینگی، کسری بودجه خود را تأمین کند و بدهی‌های خود را تسویه نماید. بنابراین یکی از کاربردهای مهم این اوراق اجاره سهام، به جایگاه آن در نزد دولت برمی‌گردد که به‌طور معمول به دلیل نبود بازار متشکل برای تسویه بدهی‌های آن، اکثر بدهی‌هایش به‌صورت زنجیره‌ای به‌نظام بانکی و بانک مرکزی متصل می‌شود که آسیب‌هایی را به دنبال دارد که ازجمله آسیب‌های آن، شامل قفل شدن منابع بانکی به دلیل انجام نشدن تعهدات دولت و رشد پایه پولی به دلیل استقراض از بانک مرکزی می‌شود. تشکیل بازار بدهی در ایران می‌تواند زمینه خروج غیرتورمی از رکود را فراهم کند. فلذا با توجه به محدودیت‌های دولت در انتقال دارایی‌های خود جهت انتشار اوراق اجاره، استفاده از این نوع تأمین مالی برای دولت با موانعی رو به خواهد بود، بنابراین می‌توان از اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام استفاده نمود. پس همان‌طور که توضیح داده شد یکی دیگر از کاربردهای اصلی اوراق اجاره سهام، بحث تأمین مالی خصوصاً دولت و همچنین نهادهای مالی و شرکت‌های سرمایه‌گذاری و هلدینگ‌ها است.

مکانیسم و رویه انتشار صکوک اجاره سهام به این صورت است که بانی دارایی‌های خود یعنی سهام یا سبدی از مجموعه سهم‌هایی که تحت تملک خود دارد را به نهاد واسط می‌فروشد و در ادامه اجاره به‌شرط تملیک می‌کند، همچنین نهاد واسط با انتشار اوراق اجاره، وجوه سرمایه‌گذاران را جمع‌آوری کرده و قیمت سهام را به بانی پرداخته و آن‌ها را خریداری می‌کند. در ادامه، بانی با اجاره‌بهای مشخص دارایی‌های

مزبور را اجاره به‌شرط تملیک می‌کند. درنتیجه سهام بانی به مالکیت صاحبان اوراق در می‌آید و به نهاد واسط به‌عنوان وکیل صاحبان اوراق تحویل داده می‌شود و مبلغ اجاره‌بها از جانب بانی در اقساط معیّن به سرمایه‌گذاران پرداخت می‌شود و درنهایت دارایی به ملکیت بانی برمی‌گردد. به‌عبارت‌دیگر، در سررسید اوراق، نهاد واسط سهامی را که در تملک خود دارد به تملیک بانی در می‌آورد و وجوه حاصله را بابت پرداخت اصل اوراق اجاره به دارندگان اوراق پرداخت می‌کند (اعتصامی و سعدی، ۱۳۹۹، ص. ۱۲۵). در خصوص شیوه انتشار صکوک اجاره مبتنی‌بر سهام، چند نکته حائز اهمیت است. اولین نکته، مربوط به نرخ سود این اوراق است. در حال حاضر نرخ سود اوراق به‌صورت ثابت و متناسب با نرخ سود بانکی در نظر گرفته می‌شود. درحالی‌که با توجه به ماهیت این اوراق، لازم است تا این نرخ متناسب با عایدی سهام مورد اجاره باشد. نکته دوم مربوط به منافع سهام و تأثیرگذاری آن بر ارزش‌گذاری این اوراق است. هر سهم دارای یک‌سری منافعی است که برخی از آن به مستأجر(بانی) منتقل می‌شود و برخی برای موجر(دارندگان اوراق) باقی می‌ماند. بنابراین لازم به ذکر است که در صکوک اجاره سهام، سود تقسیمی سهام به بانی منتقل‌شده و در نرخ سود اوراق نیز تأثیرگذار است و مابقی منافع ازجمله سود ناشی از نوسان قیمت سهم و حق تقدم و حق رأی برای دارندگان اوراق باقی می‌ماند. در بخش مربوط به ارائه مدل پیشنهادی، در خصوص شیوه مدل‌سازی و استفاده از متغیّرها و استفاده از تغییرات قیمت دارایی پایه به تفصیل بحث می‌شود.

انتشار این نوع از اوراق اجاره برای اولین دفعه بدین‌صورت بوده که دولت با استناد به رأی کمیته تخصصی فقهی و موافقت سازمان بورس و اوراق بهادار، مجوز انتشار اوراق اجاره تأمین نقدینگی تا سقف ۵۰ هزار میلیارد ریال توسط سازمان تأمین اجتماعی را صادر کرد که با تضمین و تسویه اصل و سود توسط دولت که در بودجه سنوات بعد نیز پیش‌بینی می‌شود بدهی دولت با سازمان تأمین اجتماعی تسویه شود.

این اوراق نخستین اوراق اجاره سهام بازار سرمایه بود که شرکت سرمایه‌گذاری تأمین اجتماعی (شستا) برای تأمین نقدینگی خود به پشتوانه سهام شرکت سرمایه‌گذاری نفت و گاز و پتروشیمی تأمین (تاپیکو) در اسفندماه ۱۳۹۶ باهدف تسویه مطالبات سازمان تأمین اجتماعی اقدام به انتشار آن کرد. سود این اوراق ۲۰ درصد و مدت پرداخت آن هر ۶ ماه یک‌بار بود. ضامن این اوراق بانک رفاه کارگران بوده و با توجه به صحبت‌هایی که صورت گرفته بوده، ضمانت اوراق قابل‌انتقال به دولت بود (کاوند، ۱۳۹۷، ص. ۱۷). لازم به ذکر است که تاکنون ۱۸ مورد انتشار اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام با همین روش و وضعیت صورت گرفته است که دو مورد از آن‌ها سررسیده شده و مابقی در حال معامله هستند.

۳. ارزیابی مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مرتبط با سهام

در این بخش قصد داریم تا به توضیحاتی در خصوص مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مرتبط با سهام و ارزیابی آن‌ها بپردازیم. پیش از اینکه به این مسأله اشاره کنیم، جهت فهم و پردازش دقیق‌تر مطالب مربوط به مدل‌سازی و ارزش‌گذاری با استفاده از روش ریاضیات تصادفی، لازم است تا مفاهیم و مقدمات ریاضیات تصادفی متناسب با اقتضای مسائل موجود مطرح شود.

ریاضیات مالی، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که با بازارهای مالی سروکار دارد. ریاضیات مالی و تصادفی کاربردهای متعددی دارد که امروزه جایگاه ویژه‌ای در بازارهای مالی پیدا کرده و گسترش زیادی داشته است. ازجمله کاربردهای مهمی که در خصوص ریاضیات مالی می‌توان ذکر کرد، مدل‌های ارزش‌گذاری است که بسیار نیز مورداستفاده قرار می‌گیرد. مدل‌های قیمت‌گذاری شامل مواردی همچون قیمت‌گذاری سهام و قیمت‌گذاری اوراق قرضه و قیمت‌گذاری قراردادهای آتی و قیمت‌گذاری قراردادهای معاوضه و قیمت‌گذاری اختیارات است.

همان‌طور که توضیح داده شد، یکی از کاربردهای ریاضیات تصادفی، ارزش‌گذاری اوراق قرضه است که مدل‌های بسیار زیادی برای مدل‌سازی تصادفی قیمت اوراق قرضه وجود دارد و مرتبط با موضوع پژوهش است.

اهمیت بحث ارزش‌گذاری اوراق قرضه به این صورت است که در تدوین مدل ارزش‌گذاری برای صکوک اجاره سهام با توجه به اینکه مدل ارزش‌گذاری با استفاده از ریاضیات تصادفی در خصوص اوراق اجاره تعریف نشده و همچنین با توجه به اینکه مدل ارزش‌گذاری اوراق اجاره سهام نزدیک به مدل ارزش‌گذاری اوراق قرضه است، لذا از روش مدل‌سازی ارزش‌گذاری اوراق قرضه با نرخ سود متناسب با سهام می‌توان استفاده کرد و باید توجه داشت که نرخ سود صکوک اجاره سهام، ماهیت تصادفی خود را از عملکرد تصادفی عین مستأجره یعنی قیمت یک سهام مشخص به‌عنوان دارایی پایه می‌گیرد و بنابراین برای هر سهم لازم است تا شرایط و ویژگی‌های خاص آن در فرایند تصادفی در نظر گرفته شود.

در ابتدای بحث ریاضیات تصادفی باید اشاره‌کنیم زمانی که به سراغ داده‌های مالی می‌رویم، با فرکانس‌های زیادتری مواجه هستیم و با نوسانات عجیب‌وغریبی سروکار داریم و ما را دچار مشکل خواهد کرد. بدین معنی که اصطلاحاً به زبان ریاضی، مشتق‌ناپذیر است و نمودار آن دارای نقاط تیز است. در این حالت مدل‌سازی ما دچار مشکل خواهد شد و برای این معضل دو راه وجود دارد. راه‌حل اول به این صورت است که نوک‌های تیز مانند را چشم‌پوشی کنیم و یک نمودار خطی برای آن نمودار سابق رسم کنیم و لذا در این حالت می‌توانیم روند[8] را مدل‌سازی کنیم اما نکته‌ای که وجود دارد این است که در این حالت ما نمی‌توانیم نوسانات و نوک‌های تیز را مدل‌سازی کنیم. این حالت برای تحلیل‌های بلندمدت مناسب بوده و لازم به ذکر است که در این حالت بحث ریاضیات تصادفی مطرح نیست. در حالت دیگر اما اگر قصد

داریم که تحلیل‌هایمان به شکل کوتاه‌مدت و دقیق‌تر باشد، تمام نوسانات[۹] و بالا و پایین‌هایی که وجود دارد، از اهمیت زیادی برخوردار است.

در ذیل بحث نوسانات، لازم به ذکر است که چند نوع نوسانات تصادفی یا فرایند تصادفی وجود دارد که شامل فرایند تصادفی انتشار[۱۰]، فرایند تصادفی پرش[۱۱] و فرایند تصادفی پرش- انتشار[۱۲] است. فرایند تصادفی پرش- انتشار بدین‌معنی است که در برخی مواقع یک داده مالی به‌طور مثال قیمت سهام یک شرکت نوسان خود را در هنگام معاملات دارد ولی در یک لحظه مشاهده می‌شود که قیمت به سمت بالا یا پایین پرش دارد.

در راستای بحث فرایند تصادفی باید اضافه کنیم زمانی که در خصوص فرایند تصادفی صحبت می‌کنیم لازم است تا در خصوص موارد مربوط به‌احتمال ازجمله تابع توزیع احتمال و تابع چگالی احتمال آشنائیت داشته باشیم. در فضای مربوط به احتمال، چند مفهوم مهم مورداشاره قرار می‌گیرد ازجمله فضای نمونه (Ω)، جبر سیگما ($\mathcal{F}$) و مفهوم احتمال (P). اصطلاحاً این سه‌گانه ($P, \mathcal{F}, \Omega$) را فضای احتمال گوییم. مجموعه‌ای از همه رخدادهای ممکن را فضای نمونه (Ω) گوییم. به‌طور مثال اگر در خصوص آب‌وهوای روز فردا صحبت می‌کنیم، ممکن است که هوا بارانی یا ابری یا آفتابی یا ... باشد که مجموعه‌ای از همه حالت‌ها را فضای نمونه گوییم. یا اینکه به‌طور مثال اگر در خصوص قیمت سهام صحبت می‌کنیم، فضای نمونه‌اش می‌تواند بی‌نهایت باشد. پس به‌طور خلاصه می‌توان اشاره کرد که فضای نمونه تعدادش می‌تواند محدود یا بی‌نهایت باشد. نکته‌ای که وجود دارد این است که اگر فضای نمونه محدود باشد، مشکلی نخواهیم داشت و از همان Ω استفاده می‌کنیم اما به دلیل اینکه ممکن است فضای نمونه بی‌نهایت باشد، از مفهوم دیگری استفاده می‌کنیم. به‌عبارت‌دیگر از یک زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه استفاده می‌کنیم که اصطلاحاً این زیرمجموعه را جبر سیگما ($\mathcal{F}$) گویند. به جبر سیگما اصطلاحاً ساختار اطلاعاتی[۱۳] نیز گفته می‌شود.

اعضای Ƒ یا ساختار اطلاعاتی را رخداد[۱۴] گوییم. خاصیت محدودکنندگی جبر سیگما به ما کمک می‌کند تا از این ساختار اطلاعاتی استفاده کنیم. در خصوص مفهوم احتمال باید اشاره‌کنیم که P یک تابع است. پس تابع احتمال، یک تابعی است که برای اعضای این ساختار اطلاعاتی یک عددی بین صفر و یک در نظر می‌گیرد. $P: Ƒ \rightarrow [0,1]$ به‌طور مثال اینکه می‌گوییم برای آب‌وهوای فردا حالت‌های مختلفی وجود دارد و به احتمال ۲درصد هوای فردا ابری و به احتمال ۱۵درصد برفی خواهد بود. جهت توضیح بیشتر در خصوص این سه‌گانه در قالب مثال باید بگوییم که اگر به‌طور مثال تمام رخدادهای موجود (Ω) برابر نمره دانشجویان باشد. همچنین ما هیچ اطلاعاتی در این خصوص نداریم که نمرات به چه صورت است، بنابراین ما داده‌ها را محدود می‌کنیم و به این صورت می‌گوییم که جبر سیگما، بازه [0,20] است. حال می‌گوییم که از اینجا می‌خواهیم یک احتمالی را در نظر بگیریم و آن احتمال یک بخش خاصی از این بازه است. به‌طور مثال احتمال قبولی دانشجویان مدنظر است و اینکه احتمال رخداد آن به چه صورت است (جلوداری، ۱۳۹۹، ص. ۱۱).

پس به‌طور خلاصه با توضیحاتی که داده شد، این سه‌گانه اهمیت زیادی دارد و هر موقع که می‌خواهیم در خصوص یک متغیّر تصادفی یا رخداد تصادفی صحبت کنیم، لازم است تا Ω، Ƒ و P مشخص باشد.

با توجه به مقدماتی که در خصوص سه‌گانه ذکر شد، حال می‌توانیم متغیّر تصادفی را تعریف کنیم. متغیّر تصادفی در فضای احتمال $(P, Ƒ, \Omega)$ تعریف می‌شود. متغیّر تصادفی X تابعی است که اعضای Ω را با توجه به ساختار اطلاعاتی که محدودکننده است به یک عددی در R نسبت می‌دهد ($P: Ƒ \rightarrow R$). نکته‌ای که وجود دارد این است که متغیّر تصادفی X اصطلاحاً Ƒ-measurable یا Ƒ-predictable است. دلیل آن این است که اگر ما جبر سیگما را تعریف نکنیم متغیّر تصادفی X شناخته شده نیست و لذا قابل‌اندازه‌گیری نخواهد بود. همان‌طور که در تعریف متغیّر تصادفی ذکر کردیم، به

رخدادهای زیرمجموعه فضای نمونه‌ای ما یک عددی را نسبت می‌دهد. به‌طور مثال در خصوص اتفاقات آب و هوایی که ممکن است برای فردا رخ بدهد به این صورت بوده که به هرکدام از حالت‌های ابری یا ... عددی را نسبت می‌دهد. نکته مهمی که در خصوص متغیّر تصادفی وجود دارد این است که دامنه متغیّر تصادفی برابر است با حالت‌های فضای نمونه با در نظر گرفتن جبر سیگما و بُرد آن برابر است با یک عددی در R و هر عددی می‌تواند نسبت داده شود. به‌طور مثال در خصوص نمره دانشجویان باید ذکر کرد که نمره دانشجویان یک متغیّر تصادفی است. این متغیّر تصادفی می‌تواند خودِ نمره باشد یعنی از صفر تا ۲۰ و همچنین بعضی وقت‌ها می‌توانیم بگوییم که می‌خواهیم از ۱۰۰نمره بدهیم. یا به‌طور مثال ممکن است بگوییم به افرادی که نمره قبولی را کسب کرده‌اند (رخدادهای ۱۰تا۲۰) عدد ۱ و به سایر افراد (رخدادهای صفر تا ۱۰) عدد صفر را نسبت می‌دهیم.

اکنون می‌آییم آن احتمالی که در موردش صحبت کرده بودیم را برای متغیّر تصادفی تعریف می‌کنیم. پس هر موقع که اسمی از متغیّر تصادفی ذکر می‌کنیم، اولین نکته‌ای که مطرح می‌شود، تابع توزیع احتمال است. تابع توزیع احتمال با F نشان داده می‌شود و اندیس آن، متغیر تصادفی است. به‌طور مثال $F_x:R\rightarrow[0,1]$ اینکه هرکدام از عددهایی که از R می‌گیرد چه احتمالی بین صفرویک نسبت داده می‌شود را تابع توزیع احتمال گوییم.

متغیّر تصادفی دو حالت دارد که شامل حالت گسسته (مثل اعدادی که برای حالت‌های آب و هوایی در نظر گرفتیم) و حالت پیوسته (مثل نمره دانشجویان) است. بحث تفکیک متغیّرهای تصادفی به دو حالت گسسته و پیوسته اهمیت زیادی در بحث تابع توزیع آن‌ها دارد. به‌طور مثال اگر از ما سؤال شود که احتمال رخداد نمره دقیقاً ۱۹ چقدر است، در پاسخ به این سؤال باید بگوییم که احتمال آن صفر است و اصلاً چنین چیزی در متغیّر تصادفی پیوسته معنی ندارد و قابل احصاء نیست و بلکه به‌جای آن

می‌توانیم بگوییم که احتمال رخ دادن نمرات زیر ۱۰ چقدر است. لازم به ذکر است که حالت گسسته، در یک نقطه یک عدد را به ما می‌دهد اما در حالت پیوسته یا همان تابع چگالی احتمال، هیچ موقع یک نقطه معنی و مفهوم ندارد. به‌طور مثال فرض کنید که متغیّر تصادفی ما، قد دانشجویان است که توزیع آن نرمال است. قد دانشجویان یک متغیّر تصادفی پیوسته است که تابع چگالی احتمال آن نرمال است. مثلاً احتمال اینکه قد دانشجویان بین ۱,۶۵ و ۱,۸۰ باشد چقدر است. بنابراین برای اینکار از انتگرال‌گیری تابع چگالی احتمال استفاده می‌کنیم و این احتمال را محاسبه می‌کنیم.

توزیع‌های احتمال متعددی وجود دارد ولی اگر بخواهیم به دو مورد از مهم‌ترین آن‌ها اشاره‌کنیم باید بگوییم که شامل اولاً؛ تابع چگالی نرمال است که می‌توانیم به‌عنوان توزیع احتمال برای یک متغیر تصادفی در نظر بگیریم که مشخصات آن به‌صورت زیر است:

رابطه (۱): $$F_x = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\delta^2}} \qquad E(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2$$

ثانیاً؛ تابع پواسون است که تعداد رخداد در یک واحد مشخص را نشان می‌دهد و به‌عنوان مهم‌ترین توزیع گسسته به‌شمار می‌آید. به‌طور مثال تعداد غلط‌های املایی در هر صفحه یا به‌طور مثال تعداد مشتریانی که در هر یک ساعت به یک مغازه مراجعه می‌کنند. توزیع پواسون درواقع تعداد رخداد را می‌شمارد. لازم به ذکر است که این توزیع پواسون در خصوص فرایند تصادفی پرش که توضیح داده بودیم بسیار مفید و مؤثر است، زیرا در آنجا نیز تعداد برای ما اهمیت دارد. مشخصات تابع توزیع پواسون به‌صورت زیر است:

رابطه (۲): $$F(X = K) = \frac{\lambda^k}{K!} e^{-\lambda} \qquad K = 0.1.2.3\ldots \qquad E(X) = Var(X) = \lambda$$

بنابراین این دو موردی که توضیح داده شد، ازجمله توزیع‌های بسیار معروف و مشهور است که کاربرد زیادی دارد.

در این راستا و در ادامه نکاتی که در خصوص فضای احتمال و متغیّر تصادفی ذکر شد، حال به بحث فرایند تصادفی می‌پردازیم. در فرایند تصادفی، ما مجموعه‌ای از متغیّرهای تصادفی در طول زمان را داریم. لذا زمان s و t را در نظر می‌گیریم و بیان می‌کنیم که $t>s>0$ است. به‌عبارت‌دیگر زمان s قبل از زمان t است و اطلاعاتی که برای متغیّر تصادفی X_s استفاده می‌کنیم مربوط به زمان s است درحالی‌که وقتی زمان می‌گذرد و به جلو حرکت می‌کند و ما X_t را مشاهده می‌کنیم، اطلاعات مربوط به زمان t را در اختیار داریم. درواقع X_s، از ساختار اطلاعاتی زمان s یعنی F_s استفاده می‌کند و X_t از ساختار اطلاعاتی زمان t یعنی F_t استفاده می‌کند.

با توضیحات داده شده، فضای احتمال به‌صورت (P, F, F_t, Ω) خواهد بود. F_t درواقع ساختار اطلاعاتی فیلتر شده t است. معروف‌ترین مثالی که در این خصوص می‌توان ذکر کرد، قیمت سهام است. F_t در این مثال بدین معنی است که بیان می‌کند اگر X_t مثلاً تاریخ ۱۲ دی‌ماه باشد، این متغیّر تصادفی یک وضعیت مخصوص به خود را دارد و اگر ۱۰ دی‌ماه باشد، مجدداً این متغیّر تصادفی یک وضعیت مخصوص به خود را دارد و به همین صورت ادامه خواهد داشت. چون ما اطلاعات جدیدتری داریم و درواقع در حال استفاده از روز قبل هستیم، بنابراین قیمت سهام یک متغیّر تصادفی است که در طول زمان معنی دارد، یعنی اینکه در هر روزی یک مقداری را می‌تواند به خود اختصاص دهد و در هر مقداری که به خود اختصاص می‌دهد، چهارگانه P, F, F_t, Ω بر آن ظاهر خواهد شد.

فرایند تصادفی براونی یا وینر(B_t) و فرایند تصادفی پواسون(N_t)، ازجمله مهم‌ترین فرایندهای تصادفی است که می‌توان به آن اشاره نمود. فرایند تصادفی براونی یا وینر، یک‌سری ویژگی‌هایی دارد که به این صورت است که ***اولاً:*** از مبدأ شروع می‌شود

($B_0=0$). ***ثانیاً:*** زمان پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست. ***ثالثا:*** اگر زمان t>s باشد، ما به B_t-B_s اصطلاحاً «گام» گوییم. ویژگی این گام و این عبارت به این صورت است که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس |t-s| است B_t-B_s~N(0,t-s). ***رابعاً:*** گام‌ها به‌صورت مانا و مستقل هستند. بدین‌معنی که احتمال وقوع این گام‌ها ارتباطی به زمان آن ندارد و به خود فاصله مرتبط است. در خصوص فرایند تصادفی وینر باید اضافه کنیم که در برخی مواقع با W_t نیز نشان داده می‌شود. فرایند تصادفی دیگری که نام‌برده شد، فرایند تصادفی پواسون است که اهمیت زیادی دارد. این فرایند تصادفی درواقع همان متغیّر تصادفی پواسون در طول زمان است. همان‌طور که قبلاً ذکر کردیم، متغیّر تصادفی پواسون تعداد رخدادها را شمارش می‌کرد(N) اما در اینجا در طول زمان در نظر گرفته می‌شود. به‌طور مثال می‌توان به تعداد غلط‌ها در یک صفحه در روز گذشته یا امروز یا فردا یا مثلاً تعداد دانشجویانی که در سال گذشته نمرات پایینی را کسب کرده‌اند اشاره کنیم. بنابراین در این نوع از فرایند تصادفی به دلیل اینکه بحث تعداد مورداشاره قرار می‌گیرد، فلذا ما شاهد پرش‌های خواهیم بود. این فرایند نیز همانند فرایند وینر یک‌سری ویژگی‌هایی دارد. ***اولاً:*** از مبدأ شروع می‌شود($N_0=0$). ***ثانیاً:*** از سمت راست پیوسته است. ***ثالثاً:*** گام‌ها (N_t-N_s) مانا و مستقل هستند. ***رابعاً:*** گام‌ها از توزیع پواسون نشأت می‌گیرند:

رابطه (۳): $E(N_t-N_s)=Var(N_t-N_s)=\lambda(t-s)$

اکنون پس از بیان مطالبی در خصوص فضای احتمال و متغیّر تصادفی و فرایند تصادفی، به سراغ حساب دیفرانسیل تصادفی و معادله دیفرانسیل تصادفی می‌رویم.

جهت توضیح در خصوص حساب دیفرانسیل تصادفی باید ذکر کنیم که ما در حالت حساب دیفرانسیل معمولی و غیرتصادفی مثلاً ناحیه a تا b از نمودار که تابع آن f(t) است را افراز می‌کنیم و مساحت زیر آن نمودار را به دست آوریم. اما در حالت

تصادفی، علی‌رغم درنظرگرفتن موارد مربوط به حساب دیفرانسیل معمولی، بالا و پایین‌هایی که در نمودار مشاهده می‌شود، لازم است تا قسمت‌های نوسانی که در نمودار وجود دارد نیز وارد مدل شود. اگر معادله دیفرانسیل تصادفی را به‌صورت $dz= f(t).dt + g(t).dw_t$ تعریف کنیم، بخش اول معادله $(f(t).dt)$ مربوط به بالا و پایین‌های معمولی و عادی بوده که رخ می‌دهد و در حالت حساب دیفرانسیل معمولی موردمحاسبه قرار می‌گیرد؛ بخش دوم معادله $(g(t).dw_t)$ درواقع همان قسمت‌های نوسانی است که w_t اشاره به فرایند وینر دارد. نکته مهمی که در اینجا وجود دارد این است که اگر ما بخواهیم نسبت به رابطه dz انتگرال‌گیری را انجام بدهیم، انتگرال قسمت اول یعنی $f(t).dt$ را می‌دانیم که به چه صورت است اما سؤالی که به وجود می‌آید این است که انتگرال‌گیری قسمت دوم معادله چگونه انجام خواهد شد. در این راستا باید ذکر کنیم که بحث دیفرانسیل تصادفی عملاً به این مسأله می‌پردازد. همان‌طور که گفته بودیم، dz یک معادله دیفرانسیل تصادفی است که باید حل شود و جهت حل کردن این معادله باید یک انتگرال‌گیری تصادفی را انجام دهیم. به‌عبارت‌دیگر پاسخ dz، $Z(t)$ خواهد بود. لازم به ذکر است که به دست آوردن $Z(t)$ چه از طریق راه‌حل ریاضی و چه از طریق شبیه‌سازی یکسان خواهد بود.

۳ نوع انتگرال در اینجا قابل‌طرح است که در ادامه اشاره خواهد شد:

۱. انتگرال غیرتصادفی(ریمان): اگر انتگرال ما به این صورت باشد رابطه آن به شکل زیر است:

رابطه (۴): $$\int f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta t_i$$

Δt درواقع افراز یا فاصله a تا b از نمودار است که توضیح داده بودیم و گفتیم که مساحت زیر نمودار را باید محاسبه کنیم. اگر ما n حالت را در نظر بگیریم، رابطه (۴) به دست خواهد آمد.

۲. انتگرال ریمان پیچیده:

رابطه (۵): $$\int f(t)dg(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)[g_{ti} - g_{ti-1}]$$

حال با استفاده از مفهوم انتگرال ریمان پیچیده، به سراغ نوع سوم یعنی انتگرال تصادفی(انتگرال ایتو) می‌رویم که اهمیت دارد.

۳. انتگرال تصادفی(انتگرال ایتو): حالت کلی انتگرال تصادفی به شکل زیر است که در ادامه از آن استفاده خواهد شد.

رابطه (۶): $$\int_a^b f(t)dw_t = -\int_a^b w_t \acute{f}_t d_t + f(b)w_b - f(a)w_a$$

همان‌طور که ذکر شد، هدف از ارائه انتگرال تصادفی، حل معادله دیفرانسیل تصادفی است. بنابراین با توجه به انتگرال تصادفی معرفی‌شده و معادله دیفرانسیل تصادفی $dz= f(t).dt + g(t).dw_t$ داریم:

رابطه (۷): $$x = \int f(t)dt + \underbrace{\int g(t)dw_t}_{-\int_0^T w_t \acute{g}_t d_t + w_T g(T)}$$

در اینجا چند حالت وجود دارد که ممکن است مشکلاتی به وجود آید. حالت اول این است که ممکن است در برخی موارد ضریب dw_t، تصادفی باشد. این نوع از انتگرال‌ها رابطه خاصی ندارند و با توجه به تعریفی که گفته بودیم حل خواهند شد. به‌طور مثال در انتگرال $\int_a^b w_t dw_t$، w_t مشتق‌پذیر نیست و از رابطه نهایی نمی‌توان استفاده نمود. حالت دومی که ممکن است دچار مشکل شویم در جایی است که ضریب dw_t، خود متغیّر تصادفی هدف باشد. به این صورت که با درنظرگرفتن رابطه $dx = \alpha x d_t + \beta x dw_t$ داریم که $x = \int \alpha x d_t + \int \beta x dw_t$ است. جهت حل‌کردن چنین مسائلی باید به سراغ رابطه ایتو(لم‌ایتو) برویم. لازم به ذکر است که رابطه ایتو به ما کمک می‌کند تا معادله دیفرانسیل تصادفی را به‌گونه‌ای تغییر بدهیم که در سمت راست معادله x وجود نداشته باشد.

در کنار بحث انتگرال تصادفی ایتو، یک انتگرال دیگری نیز وجود دارد که برای فرایند تصادفی پواسون تعریف شده است و به انتگرال پواسون معروف است:

رابطه (۸): $(M_t = N_t - \lambda)$

رابطه (۹): $\int_a^b M_t dM_t = \frac{1}{2}({M^2}_b - {M^2}_a) - \frac{1}{2}(N_b - N_a)$

همان‌طور که گفته شد، یکی از مهم‌ترین مسائل، رابطه انتگرال تصادفی است که کاربردهای مؤثری دارد و گفته شد که این انتگرال در دو مورد نمی‌تواند به ما کمک کند. اول اینکه ضریب $w_t dw_t$ داشته باشیم و دوم اینکه x_t در رابطه وجود داشته باشد. فلذا گفته می‌شود که در این موارد نمی‌توانیم انتگرال تصادفی را مورداستفاده قرار بدهیم. بنابراین لازم است تا از رابطه ایتو(لم ایتو) استفاده کنیم.

همان‌طور که گفتیم، به‌طور مثال اگر معادله تصادفی یا فرایند انتشار برابر $dx = \alpha x d_t + \beta x dw_t$ را در نظر بگیریم که حالت ساده‌ای است و البته متأسفانه این رابطه را با انتگرال‌گیری تصادفی نمی‌توانیم حل کنیم. زیرا در سمت راست x_t وجود دارد. بنابراین جهت حل معادله، از x فاکتور می‌گیریم و به سمت چپ معادله منتقل می‌کنیم و داریم:

رابطه (۱۰): $\frac{dx_t}{x_t} = \alpha dt + \beta dw_t$ یا $d(\ln x_t) = \alpha dt + \beta dw_t$

حال سمت راست این رابطه را می‌توان با انتگرال‌گیری ساده کنیم، اما در سمت چپ، $d(\ln x_t)$ وجود دارد. جهت حل مشکل از رابطه ایتو استفاده می‌شود و این مشکل حل خواهد شد.

فرض می‌کنیم که X_t متغیّر تصادفی باشد و $F_t = f(x_t)$ یک تابع مشتق‌پذیر است. اکنون با استفاده از بسط تیلور داریم:

رابطه (۱۱): $dF_t = f'(x_t)dx_t + \frac{1}{2}f''(x_t)(dx_t)^2$

حال اگر dx_t در ساده‌ترین حالت قرار داشته باشد یعنی $dx_t = \alpha d_t + \beta dw_t$ باشد، رابطه بسط تیلور به‌صورت زیر خواهد بود:

رابطه (۱۲): $$dF_t = f'(\alpha d_t + \beta dw_t) + \frac{1}{2}f''(\alpha d_t + \beta dw_t)^2$$

با انجام محاسبات مربوط به رابطه فوق و در نظر گرفتن روابط بنیادین در دیفرانسیل تصادفی ($dtdt = 0$ و $dtdw = 0$ و $dwdw = dt$)، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

رابطه (۱۳): $$dF_t = \left[f'\alpha + \frac{1}{2}f''\beta^2\right]d_t + f'\beta dw_t$$

حال سؤال مطرح می‌شود که کاربرد رابطه ایتو در این مثال ساده‌ای که مطرح کردیم به چه صورت است.

رابطه (۱۴): $$\frac{dx_t}{x_t} = d(\ln x_t) = \alpha dt + \beta dw_t$$

رابطه (۱۵): $$F(x) = \ln x \quad و \quad f' = \frac{1}{x} \quad و \quad f'' = -\frac{1}{x^2}$$

با در نظر گرفتن موارد فوق و محاسبات مربوط به آن، به رابطه زیر خواهیم رسید:

رابطه (۱۶): $$d(\ln x_t) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)dt + \beta dw_t$$

اکنون به سراغ انتگرال‌گیری می‌رویم:

رابطه (۱۷): $$\ln x_t = \int(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)\,dt + \int \beta\, dw_t$$

رابطه (۱۸): $$\ln\frac{x_t}{x_0} = (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta w_t$$

رابطه (۱۹): $$x_t = x_0 e^{\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta w_t}$$

این درواقع حرکت براونی هندسی(نمایی) را نشان می‌دهد و به‌عبارت‌دیگر، پاسخ محاسبات مدنظر است که می‌توان با حالت شبیه‌سازی مقایسه کرد و مشاهده می‌شود که پاسخ‌ها یکسان و برابر است.

تا الآن بیان می‌کردیم که F تابعی از x_t باشد. درحالی‌که F می‌تواند تابعی از x_t و خود t هم باشد. فلذا رابطه جدید ایتو در این حالت برابر است با:

رابطه (۲۰):
$$dF_t = \left[f_t' + f_x'\alpha + \frac{1}{2}f_x''\beta^2\right]dt + f_x'\beta dw_t$$

بنابراین با این توضیحاتی که تا اینجا ارائه شد، می‌توان گفت که رابطه ایتو به ما کمک می‌کند تا آن دسته از معادلات تصادفی را که نمی‌توانیم انتگرال تصادفی بگیریم از آن استفاده کنیم.

اکنون قصد داریم به بررسی و ارزیابی مقاله‌هایی که به کاربرد ریاضیات تصادفی در اوراق قرضه مرتبط با سهام یا شاخص سهام اشاره دارد بپردازیم.

مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) در مقاله خود به ارزش‌گذاری اوراق بدهی مبتنی‌بر سهام اشاره دارد. این مقاله درواقع اوراقی را در نظر می‌گیرد که مرتبط با سهام است و قصد دارد تا ایده خود را با تمسک به رابطه اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام[۱۵] بیان کند. به‌عبارت‌دیگر جهت به‌دست‌آوردن رابطه نهایی محاسبه ارزش اوراق مبتنی‌بر سهام، از رابطه ارزش‌گذاری اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام استفاده می‌کند. ایشان از رابطه واسیچک جهت تعیین نرخ بهره استفاده می‌کند و در ادامه با استفاده از تابع‌گرین به رابطه نهایی ارزش این نوع از اوراق قرضه دست پیدا می‌کند.

این مقاله جهت بهره‌گیری از تابع ارزش‌گذاری اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام، از کتاب ویلموت[۱۶] (۲۰۰۰م) استفاده کرده و به آن ارجاع داده است. لازم به ذکر است که بخشی از این کتاب به اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام و با استفاده از نرخ بهره تصادفی می‌پردازد و درواقع جهت تعیین کردن ارزش اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام از یک‌سری مقدمات دیگر نیز استفاده می‌کند که در بخش‌های دیگر این کتاب موجود است. بنابراین در این قسمت قصد داریم تا به روابط و مراحل رسیدن به تابع تغییرات ارزش این نوع از اوراق قرضه اشاره کنیم و در بخش بعد با تمسک به قالب کلی این محاسبات و همچنین افزودن مفروضات پژوهش و درنظرگرفتن ملاحظات، به معادله

دیفرانسیل تصادفی مدنظر دست پیدا کرده و سپس در بخش نهایی، شبیه‌سازی را بر روی یکی از اوراق اجاره سهام مدنظر انجام دهیم.

مفروضات این کتاب بدین شکل است که یک مدل دوعاملی را در نظر می‌گیرد و بیان می‌کند که r و s متغیّرهای مدل هستند. تابعی که بیانگر ارزش و قیمت اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام است به‌صورت V=V(s,r,t) است. مطابق کتاب فرض شده است که قیمت دارایی توسط مدل منطقی[۱۷] کنترل می‌شود و رابطه آن به‌صورت زیر است:

رابطه (۲۱): $$ds = \mu s dt + \sigma s dx_1$$

و رابطه نرخ بهره نیز در چارچوب معادله دیفرانسیل تصادفی به‌صورت زیر است:

رابطه (۲۲): $$dr = u(r.t)dt + w(r.t)dx_2$$

که u و w می‌توانند هر تابعی از r و t باشند. u و w درواقع نوع رفتار r را تعیین می‌کند. لازم به ذکر است که dx_1 و dx_2 هردو نمایانگر فرایند وینر هستند که در خصوص آن‌ها در مقدمات بحث ذکر شد. هر دو از توزیع‌های نرمال با میانگین صفر و واریانس dt گرفته شده‌اند. اما این‌ها یک متغیّر تصادفی یکسان نیستند. بااین‌حال ممکن است که با یکدیگر مرتبط باشند.

رابطه (۲۳): $$E[dx_i] = 0 \qquad E[{dx_i}^2] = dt \qquad E[dx_1 dx_2] = \rho dt$$

و $\rho(\mathrm{r.s.t})$ در فاصله ۱- و ۱+ قرار دارد.

ویلموت (۲۰۰۰م) در یک بخش دیگری از کتاب به شیوه به دست آمدن رابطه dv (معادله دیفرانسیل تصادفی ارزش اوراق) و فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی اشاره می‌کند. وی در بخشی از کتاب خود اشاره می‌کند که یک فرم و حالت کلی برای معادله دیفرانسیل تصادفی وجود دارد که به‌صورت زیر است و بر طبق این فرم معادله دیفرانسیل تصادفی هر متغیّر و دارایی پایه ساخته خواهد شد. در این رابطه، μ_i به‌عنوان

میانگین و σ_i به‌عنوان واریانس و نوسانات آن متغیّر و دارایی پایه در نظر گرفته شده است:

رابطه (۲۴): $$ds_i = \mu_i s_i dt + \sigma_i s_i dx_i$$

لذا طبق این رابطه، معادله‌های دیفرانسیل تصادفی مربوط به dr و ds مطابق روابط ۲۱ و ۲۲ بیان خواهد شد که در ادامه از آن‌ها می‌شود. اکنون در اینجا با توجه به توضیحاتی که در ابتدای بحث و در مقدمات ریاضیات تصادفی اشاره شد، کاربرد لم‌ایتو اهمیت پیدا می‌کند و با استفاده از بسط تیلور، رابطه زیر به دست خواهد آمد که فرم کلی رابطه dv است:

رابطه (۲۵): $$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}s_i s_j\frac{\partial^2 v}{\partial s_i \partial s_j}\right)dt + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial v}{\partial s_i}ds_i$$

در مرحله بعد، از رابطه (۲۵) استفاده کرده و با توجه به اینکه تنها متغیّرهای r و s را مدنظر قرار داده است و با انجام محاسبات ریاضی آن، به رابطه ۵-۳ می‌رسیم. ازآنجایی‌که طبق تعریف در رابطه dr، u و w را داریم و با توجه به اینکه در تعریف فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی از $\sigma_i s_i$ استفاده کرده است، لذا در رابطه زیر به‌جای $\sigma_i s_i$ برای i=r از w استفاده کرده است و لذا داریم:

رابطه (۲۶): $$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho\sigma s w\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}\right)dt + \frac{\partial v}{\partial s}ds + \frac{\partial v}{\partial r}dr$$

اکنون ویلموت (۲۰۰۰م) به سراغ قیمت‌گذاری اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام رفته و در این راستا یک پرتفولیویی از اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام با سررسید T_1 و همچنین به اندازه $-\Delta_2$ از اوراق با کوپن صفر با سررسید T_2 و به اندازه $-\Delta_1$ از دارایی پایه می‌سازد و طبق رابطه زیر داریم:

رابطه (۲۷): $$\pi = V - \Delta_2 Z - \Delta_1 S$$

که در این رابطه، مقادیر Δ_2 و Δ_1 است با:

رابطه (۲۸): $\Delta_1 = \frac{\partial v}{\partial s}$ $\qquad$ $\Delta_2 = \frac{\partial v}{\partial r} \Big/ \frac{\partial Z}{\partial r}$

سپس با تبدیل رابطه فوق به فرم تغییرات یعنی $d\pi = dV - \Delta_2 dZ - \Delta_1 dS$ و همچنین با در نظر گرفتن رابطه $d\pi = r\pi dt$، رابطه ارزش اوراق را به‌صورت زیر به دست آورده است:

رابطه (۲۹): $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho\sigma s w \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + rs\frac{\partial v}{\partial s} + (u - w)\frac{\partial v}{\partial r} - rv = 0$

این رابطه با در نظر گرفتن سود تقسیمی ثابت برابر است با:

رابطه (۳۰): $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho\sigma s w \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + (r - D_\circ)s\frac{\partial v}{\partial s} + (u - w)\frac{\partial v}{\partial r} - rv = 0$

همان‌طور که ذکر کردیم، مقاله مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) از این رابطه استفاده کرده و با استفاده از تابع گرین و تبدیل‌هایی که در مقاله خود ذکر کرده است به رابطه V می‌رسد که البته این قسمت محل بحث و مورد کاربرد ما نیست و ما درواقع با رابطه (۲۶) در ارتباط بوده و از شکل و قالب آن با ضمن در نظر گرفتن مفروضات پژوهش در بخش بعد استفاده می‌کنیم.

در راستای ادامه بحث ارزیابی مدل‌های ارزش‌گذاری، لازم به ذکر است که علاوه‌بر مقاله‌ای که در مورد آن صحبت شد، مقاله‌های دیگری نیز وجود دارد که مرتبط به این موضوع است و در ادامه به برخی از آن‌ها به‌صورت مختصر اشاره می‌شود. ولی با توجه به اینکه مقاله فوق به موضوع پژوهش نزدیک‌تر است، بنابراین از ایده مقاله مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) و همچنین کتاب ویلموت (۲۰۰۰م) استفاده کرده‌ایم در خصوص مقاله شلدون‌لین و تان (۲۰۰۳) و برنان و زیا (۲۰۰۰) نیز باید اشاره کرد که توضیحات مربوطه در بخش پیشینه تحقیق ارائه گردید.

۴. مدل پیشنهادی ارزش‌گذاری صکوک اجاره مبتنی‌بر سهام

در این بخش قصد داریم تا با توجه به توضیحاتی که در بخش قبل در خصوص ریاضیات تصادفی و کاربرد آن در ارزش‌گذاری اوراق قرضه داده شد، به ارائه یک مدل پیشنهادی جهت ارزش‌گذاری اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام بپردازیم.

در بخش قبل اشاره کردیم که مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) با استفاده از رابطه «ارزش‌گذاری اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام» به ارائه رابطه ارزش‌گذاری اوراق بدهی مبتنی‌بر سهام ازجمله اوراق قرضه مبتنی‌بر سهام می‌پردازد. در این بخش قصد داریم تا مدل پیشنهادی جهت ارزش‌گذاری اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام را ارائه دهیم که بر اساس معادله دیفرانسیل تصادفی است. لذا رابطه‌ای که مقاله مالیر و آلوبیدی (۲۰۰۲م) در خصوص ارزش‌گذاری اوراق بدهی مبتنی‌بر سهام با استفاده از رابطه ارزش اوراق قرضه قابل‌تبدیل به سهام از کتاب ویلموت (۲۰۰۰م) استفاده کرده است، برای ما مناسب نخواهد بود. زیرا ما قصد نداریم به رابطه نهایی دست پیدا کنیم بلکه قصد داریم تا به معادله دیفرانسیل تصادفی که مرتبط با موضوع بحث است را با استفاده از مفروضات مدنظر دست‌یافته و سپس با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی، به شبیه‌سازی آن بپردازیم و همان‌طور که در بخش قبل در ذیل بحث کاربرد ریاضیات تصادفی اشاره کردیم، قیمتی که از طریق شبیه‌سازی به دست می‌آید دقیقاً برابر با قیمتی است که از طریق رابطه محاسبه شده مربوط به اوراق به دست خواهد آمد.

لذا تنها از معادله دیفرانسیل تصادفی استفاده خواهیم کرد و قصد نداریم تا معادله را با انجام محاسبات ریاضی حل کنیم و درواقع سعی داریم تا با استفاده از فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی که در کتاب ویلموت (۲۰۰۰م) موجود است و مراحل استخراج آن توضیح داده‌شده است را با درنظرگرفتن و استفاده از مفروضات پژوهش، به معادله دیفرانسیل تصادفی مدنظر دست پیدا کنیم.

پیش از اینکه به سراغ انجام محاسبات و ارائه روابط برویم، لازم است تا مفروضات و مقدمات مدل پیشنهادی را بیان کنیم.

همان‌طور که در ابتدای پژوهش اشاره شد، اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام، درواقع اوراقی است که دارایی پایه آن سهام است و از این جهت که دارایی پایه آن شفافیت دارد و قیمت آن به‌صورت روزانه در بازار مشخص است و نسبت به اوراق اجاره معمولی برتری دارد و لذا فرایند قیمت‌گذاری آن نیز شفافیت بیشتری نسبت به اوراق اجاره معمولی خواهد داشت. لذا با توجه به اینکه دارایی پایه این نوع از اوراق اجاره به‌صورت سهام است، در مدل پیشنهادی قصد داریم تا عملاً فرایند تصادفی تغییر قیمت اوراق را به تغییر قیمت سهام ارتباط دهیم که در واقعیت نیز باید به همین صورت باشد و افزایش یا کاهش قیمت سهم پایه نیز در افزایش یا کاهش قیمت اوراق تأثیرگذار باشد. نکته دیگری که وجود دارد، مربوط به نرخ اجاره‌بها یا نرخ سود اوراق است و اینکه این نرخ برای انواع و اقسام سهام نباید ثابت باشد بلکه باید متناسب با عایدی سهام مورد اجاره در نظر گرفته شود. لذا جهت تعیین نرخ اجاره‌بها نیز می‌توان سازوکاری را درنظرگرفت تا نرخ اجاره متناسب با عایدی سهام مورد اجاره باشد.

در این بخش قصد داریم تا دو حالت را موردبررسی قرار دهیم. در حالت اول، جهت سادگی، نرخ اجاره‌بها را همان نرخی در نظر می‌گیریم که در بیانیه ثبت مربوط به هر اوراق ذکر شده است. هرچند که آن نرخ ذکر شده در بیانیه ثبت اوراق، وابسته به سود بانکی است اما ذکر کردیم که مبنای نرخ‌گذاری باید متناسب با عایدی سهام باشد و لذا در این حالت مبنای اجاره‌بها یا نرخ سود اوراق، نرخی است که در بیانیه ثبت ذکرشده است. در حالت دوم، نرخ اجاره‌بها را متناسب با عایدی سهام مورد اجاره در نظر می‌گیریم که توضیحات آن در ادامه ارائه می‌شود.

همانند بخش قبل که توضیح داده شد، در اینجا نیز شاهد متغیّرهای r وs وt هستیم که به مدل اضافه خواهند شد. نکته‌ای که در اینجا حائز اهمیت بوده و متمایز از

مفروضات بخش قبل بوده این است که در اینجا ما تنها یک دارایی را شاهد هستیم که اوراق اجاره سهام است و در ذیل آن شاهد دو بازدهی نیز هستیم. به‌عبارت‌دیگر دو بازدهی برای یک دارایی را در نظر می‌گیریم و سپس بر اساس معادله‌های دیفرانسیل تصادفی بخش قبل که توضیح داده شد، همانند زیر تعریف می‌کنیم:

رابطه (۳۱): $$ds = \mu sdt + \sigma sdx_1$$

رابطه (۳۲): $$dr = u(r.t)dt + w(r.t)dx_2$$

که درواقع از فرم رابطه دیفرانسیل تصادفی ۲۴ برگرفته شده است.

با توجه به اینکه یک دارایی با دو بازدهی را درنظرگرفته‌ایم، لذا با توجه به رابطه ۲۴، برای μ_i دو مقدار خواهیم داشت که μ_r بیانگر میانگین بازدهی ناشی از خود اوراق اجاره و بازدهی نرخ سود اوراق است و μ_s بیانگر میانگین بازدهی ناشی از تغییرات قیمت سهام است. همچنین باید اشاره کرد که برای σ_i نیز دو مقدار خواهیم داشت که σ_r بیانگر انحراف معیار بازدهی اول یعنی انحراف معیار بازدهی نرخ اجاره بوده و σ_s بیانگر انحراف معیار تغییرات قیمت دارایی پایه است. در حالت اول حل مسأله، σ_r را برابر با صفر در نظر می‌گیریم، بدین‌معنی که انحراف معیار بازدهی اوراق اجاره یا همان انحراف معیار نرخ اجاره برابر صفر است و در حالت دوم برابر صفر نباشد. بنابراین در حالت اول، از میان σ_s وσ_r، تنها شاهد حضور متغیّر σ_s خواهیم بود و در حالت دوم هر دو متغیّر را به مدل پیشنهادی وارد می‌کنیم. در راستای توضیحات مربوط به معادلات ذکر شده، باید اضافه کرد که همان‌طور که ذکر کردیم دو بازدهی برای یک دارایی داریم که یکی مربوط به ds و دیگری مربوط به dr است. لازم به ذکر است که dr رابطه مربوط به بازدهی نرخ سود اجاره‌بها و ds رابطه مربوط به بازدهی منافعی است که به مستأجر منتقل نشده است و در اختیار موجر باقی‌مانده است. هریک از ds و dr دارای یک جزء تصادفی و یک جزء ثابت و قطعی است که توضیحات آن در بخش مقدمات و کاربردهای ریاضیات تصادفی داده شده است. بدین‌صورت که به‌طور

مثال در داخل معادله دیفرانسیل تصادفی ds، جزء اول، ثابت و قطعی بوده و جزء دوم، تصادفی است که نمایانگر فرایند تصادفی وینر است. به‌عبارت‌دیگر درواقع dx_1 و dx_2 نشان‌دهنده فرایند وینر بوده که هر دو دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس dt درنظرگرفته خواهند شد و در محاسبات شبیه‌سازی نیز در بخش بعد از آن‌ها استفاده خواهد شد.

ازجمله موارد دیگر که در این قسمت از توضیحات ارائه مدل لازم به ذکر است، تعیین کردن تابع V جهت مدل‌سازی است. این تابع درواقع شامل سه متغیّر یعنی r و s و t است که بیانگر رابطه ارزش اوراق است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

رابطه (۳۳): $V = V(s.r.t)$

ازجمله مهم‌ترین موارد مربوط به این تابع، تعیین نمودن شکل و فرم تابع است. توابع متعددی وجود دارد که مورداستفاده قرار می‌گیرد که معمولاً جهت مدل‌سازی از تابع‌نمایی[۱۸] استفاده می‌شود که به‌طور مثال مقاله برنان و زیا (۲۰۰۰م)، ارزش و قیمت اوراق را با استفاده از تابع‌نمایی محاسبه کرده است. حالت ساده تابع ارزش اوراق به‌صورت زیر است:

رابطه (۳۴): $V = S_{\circ}e^{rt}$

لکن در اینجا با توجه به مفروضاتی که ذکر کردیم، دو بازدهی داریم و این دو وارد مدل خواهند شد، لذا با نظرگرفتن مفروضات مربوط به مدل مدنظر، تابع V به‌صورت زیر خواهد بود:

رابطه (۳۵): $V = V_{\circ}e^{(r+s)t}$

که در این تابع، V تابع ارزش اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام است و همان‌طور که اشاره کرده بودیم، s و r بازدهی هستند. به‌عبارت‌دیگر s بازدهی قیمت سهام پایه و r بازدهی نرخ اوراق است که در محاسبات، همان نرخ اجاره در نظر گرفته خواهد شد.

V_0 به معنای نرخ و ارزش اسمی اوراق است که این نرخ در ایران برابر ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال است که جهت تشکیل معادله دیفرانسیل تصادفی از آن استفاده خواهد شد و تشکیل این تابع، از موارد ضروری و مهم است. زیرا در صورت عدم تعیین شکل تابع ارزش اوراق، امکان تشکیل معادله دیفرانسیل تصادفی نهایی وجود نخواهد نداشت و در ادامه شبیه‌سازی میسر نخواهد بود.

اکنون با درنظرگرفتن مفروضات ذکر شده به سراغ تشکیل معادله دیفرانسیل تصادفی می‌رویم:

همان‌طور که در بخش قبل بیان کردیم، فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی dv به‌صورت زیر است که درواقع با استفاده از بسط تیلور به رابطه زیر خواهیم رسید:

رابطه (۳۶):
$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}s_is_j\frac{\partial^2 v}{\partial s_i \partial s_j}\right)dt + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial v}{\partial s_i}ds_i$$

اکنون مفروضات و متغیّرهایی که در نظر گرفته بودیم را در رابطه فوق وارد کرده و طی انجام محاسبات ریاضیاتی، رابطه زیر به دست می‌آید:

رابطه (۳۷):
$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho\sigma s w\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}\right)dt + \frac{\partial v}{\partial s}ds + \frac{\partial v}{\partial r}dr$$

که با جایگذاری ds و dr در رابطه فوق داریم:

رابطه (۳۸):
$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho\sigma s w\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}\right)dt + \frac{\partial v}{\partial s}[\mu s dt + \sigma s dx_1] + \frac{\partial v}{\partial r}[u(r.t)dt + w(r.t)dx_2]$$

حال بر اساس رابطه فوق، معادله دیفرانسیل تصادفی را برای دو حالت مذکور بررسی می‌کنیم:

- **حالت اول: نرخ سود ثابت**

با توجه به مفروضاتی که در ابتدای بحث ذکر شد، در رابطه فوق، w برابر صفر است. زیرا در نظر گرفته‌ایم که $\sigma_r = 0$ است. بنابراین رابطه ۳۸ به‌صورت زیر تغییر خواهد کرد:

رابطه (۳۹):
$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \mu s\frac{\partial v}{\partial s}\right)dt + \left(\sigma s\frac{\partial v}{\partial s}\right)dx$$

اکنون پس از استخراج معادله دیفرانسیل تصادفی مدنظر، به سراغ انجام محاسبات رفته و با استفاده از رابطه ۳۷ که در مورد آن صحبت کردیم، به معادله دیفرانسیل تصادفی نهایی دست پیدا خواهیم کرد تا در بخش بعد بتوانیم با استفاده از داده‌های موجود شبیه‌سازی را انجام دهیم. با انجام مشتقات مربوط به رابطه زار را داریم:

رابطه (۴۰):
$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = V_\circ t^2 e^{(r+s)t} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = V_\circ (r+s)e^{(r+s)t}$$
$$\frac{\partial v}{\partial s} = V_\circ t e^{(r+s)t} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = V_\circ t e^{(r+s)t}$$

بنابراین با جای‌گذاری محاسبات فوق در رابطه ۴۰، رابطه نهایی به دست می‌آید که به‌صورت زیر است:

رابطه (۴۱):
$$dv = \left[V_\circ e^{(r+s)t}\left(r + s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 t^2 + rt + \mu st\right)\right]dt + \left(\sigma s V_\circ t e^{(r+s)t}\right)dx$$

اکنون توانستیم معادله دیفرانسیل تصادفی را در حالتی که نرخ سود اوراق ثابت است را استخراج کرده و مدل پیشنهادی خود را جهت ارزش‌گذاری اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام را ارائه کنیم و در بخش بعد نیز با استفاده از این مدل پیشنهادی، به شبیه‌سازی یک نمونه تجربی از اوراق منتشرشده خواهیم پرداخت.

- **حالت دوم: نرخ سود متغیر و متناسب با عایدی سهام مورد اجاره**

در این حالت نرخ سود ثابت نیست بلکه طبق مفروضات پژوهش، متناسب با عایدی سهام مورد اجاره است. جهت تشکیل معادله دیفرانسیل تصادفی در این حالت نیز مجدداً رابطه زیر را در نظر گرفته و سپس بر اساس آن، مفروضات خود را وارد می‌کنیم:

رابطه (۴۲): $$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \rho\sigma s w \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}\right) dt + \frac{\partial v}{\partial s}[\mu s dt + \sigma s dx_1] + \frac{\partial v}{\partial r}[u(r.t)dt + w(r.t)dx_2]$$

وجه تمایز این قسمت نسبت به حالت قبل، نرخ سودی است که متناسب با عایدی سهام در نظر گرفته می‌شود و ثابت نخواهد بود. بنابراین، در رابطه بالا تمامی متغیّرها وارد خواهد شد. محاسبات مربوط به $\frac{\partial v}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$ و $\frac{\partial v}{\partial s}$ و $\frac{\partial v}{\partial r}$در حالت اول انجام شد. لکن در این حالت لازم است تا محاسبات مربوط به $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ و $\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}$ نیز انجام شود که به صورت زیر است:

رابطه (۴۳): $$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = V_\circ t^2 e^{(r+s)t} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} = V_\circ t^2 e^{(r+s)t}$$

لازم به ذکر است تابع u و w که بیانگر رفتار نرخ بهره است، همان‌طور که قبلاً بیان شد، با فرم ساده در نظر گرفته می‌شود و طبق فرم کلی رابطه ۲۳، u برابر با $\mu_r r$ و w برابر با $\sigma_r r$ است. بنابراین بانظر گرفتن این موارد و انجام محاسبات مربوط فوق، معادله دیفرانسیل تصادفی مدنظر به دست خواهد آمد که به‌صورت زیر است:

رابطه (۴۴): $$dv = \left[V_\circ e^{(r+s)t}\left(r + s + \frac{1}{2}{\sigma_s}^2 s^2 t^2 + \frac{1}{2}{\sigma_r}^2 r^2 t^2 + \rho\sigma_s s \sigma_r r t^2 + \mu_r r t + \mu_s s t\right)\right] dt + \left(\sigma_s s V_\circ t e^{(r+s)t}\right) dx_1 + \left(\sigma_r r V_\circ t e^{(r+s)t}\right) dx_2$$

اکنون توانستیم معادله دیفرانسیل تصادفی را در حالتی که نرخ سود متغیّر است را استخراج کرده و مدل پیشنهادی خود را جهت ارزش‌گذاری اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام را ارائه کنیم و در بخش بعد با استفاده از این مدل پیشنهادی، به شبیه‌سازی یک نمونه تجربی از اوراق منتشرشده می‌پردازیم.

۵. شبیه‌سازی صکوک اجاره مبتنی‌بر سهام در یک نمونه تجربی

در این بخش قصد داریم تا با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی که در بخش قبل استخراج کردیم، شبیه‌سازی مونت‌کارلو[۱۹] را بر روی آن با استفاده از داده‌های یک

نمونه تجربی از اوراق اجاره سهام منتشرشده انجام دهیم و قیمت شبیه‌سازی‌شده را به دست آوریم.

مقصود از شبیه‌سازی، یافتن مقادیری است که یک رفتاری مشابه و همانند با داده‌های اولیه دارند. شبیه‌سازی، روش‌های مختلفی دارد که شبیه‌سازی مونت‌کارلو و بوت‌استرپینگ[۲۰] ازجمله مهم‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها در مسائل مالی است. هرکدام از این دو، کاربردهای متعددی دارد که به‌طور مثال، در خصوص بوت‌استرپینگ باید اشاره کنیم که تعیین کردن احتمال موفقیت و برتری یک گزینه نسبت به گزینه‌های دیگر، پیش‌بینی قیمت سهام، تحلیل داده‌های شبیه‌سازی‌شده و همچنین پیش‌بینی اوزان بهینه سبد سرمایه‌گذاری در یک سطح بازده مشخص را می‌توانیم ازجمله کاربردهای آن نام ببریم. شبیه‌سازی مونت‌کارلو یک دسته‌ای از الگوریتم‌های محاسباتی هستند که درواقع بر اساس تکرار تصادفی نمونه‌برداری برای محاسبه نتایج مورداستفاده قرار می‌گیرد. با توجه به اتکای این روش شبیه‌سازی به تکرار محاسبات و اعداد تصادفی، برای محاسبه توسط کامپیوتر مناسب هستند. این روش نیز کاربردهای متعددی دارد که شامل محاسبه ارزش شرکت‌ها، ارزیابی سرمایه پروژه‌ها، تحلیل اقتصادی دقیق‌تر پروژه‌ها و بهینه‌ترین مقدار تولید و غیره است (صادقی، ۱۳۹۷، ص. ۴۰۲–۴۲۶). شایان ذکر است که ازجمله مهم‌ترین کاربردهای شبیه‌سازی مونت‌کارلو، مربوط به محاسبه ارزش اوراق است.

شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای حل کردن مسائل مالی از توزیع تصادفی متغیّر مربوطه استفاده می‌کند. لذا جهت انجام شبیه‌سازی مونت‌کارلو لازم است تا در خصوص توزیع متغیّری که قرار است شبیه‌سازی شود را به همراه پارامترهای آن اطلاعاتی داشته باشیم. یک‌سری از توزیع‌های تصادفی در اکسل وجود دارد که تابع مربوط به توزیع تجمعی آن‌ها در اکسل وجود دارد و قادر هستیم تا از مفهوم تابع توزیع تجمعی، شبیه‌سازی را انجام دهیم. این توزیع‌ها شامل مواردی همچون توزیع تصادفی نرمال، نرمال استاندارد، دوجمله‌ای، گاما و بتا است. با مراجعه به نرم‌افزار اکسل، در همه توزیع‌ها اگر پسوند

dist را مشاهده کردیم، به معنای به‌دست‌آوردن احتمال یا احتمال تجمعی آن در یک نقطه مشخص مثلاً x است. همچنین باید اضافه کرد که اگر در توزیع‌ها پسوند inv مشاهده شد، بدین‌معنی است که این تابع نقطه‌ای را می‌دهد که احتمال سمت چپ آن، احتمال است. برای شبیه‌سازی لازم است تا از توابع توزیع تصادفی با پسوند inv استفاده کنیم. زیرا درواقع نقاط توزیع تصادفی یا همان نقاط شبیه‌سازی‌شده را با توجه به احتمال طرف چپ آن یعنی تجمعی آن می‌دهد (صادقی، ۱۳۹۷، ص. ۴۳۷–۴۳۸).

در این راستا و با توجه به توضیحات داده شده، لازم است تا ذکر کنیم که در اینجا همان‌طور که در بخش قبل نیز اشاره کردیم، توزیع نرمال را شاهد خواهیم بود.

اکنون قصد داریم تا با توجه به نکات ذکرشده و استفاده از داده‌های یک نمونه تجربی از اوراق منتشرشده به سراغ فرایند شبیه‌سازی رفته و درنهایت نتایج آن را مشاهده کنیم. در این پژوهش، جهت شبیه‌سازی از نرم‌افزار اکسل استفاده شده است.

طبق اطلاعات برگرفته‌شده از وبگاه sukuk.ir، تاکنون ۱۸مورد اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام منتشر شده که دو مورد از آن‌ها سررسیدشده و مابقی در حال معامله هستند.

در این بخش، اوراق اجاره سهام «صخابر۱۰۲» انتخاب شده که بانی، شرکت مخابرات ایران (سهامی عام) است و در تاریخ ۱۳۹۷/۰۲/۳۰ در بازار بورس ایران منتشر شده است. لازم به ذکر است که دارایی پایه این اوراق، سهم «شرکت ارتباطات سیار ایران» است. همچنین باید اضافه کرد که نرخ این اوراق طبق بیانیه ثبت برابر ۱۶درصد در نظر گرفته شده است. عمر این اوراق، ۴ سال و مقاطع پرداخت کوپن‌ها، ۳ ماهه است و ارزش اسمی این اوراق۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال است که البته در اینجا جهت فروش بیشتر اوراق، این نرخ را به ۹۱۰,۰۰۰ ریال کاهش داده‌اند.

شایان ذکر است که در این بخش، داده‌ها به‌صورت ماهانه در نظر گرفته شده است. بدین‌صورت که به‌طور مثال قیمت دارایی پایه و قیمت اوراق از حالت روزانه به حالت ماهانه تبدیل شده است. بنابراین تاکنون طبق اطلاعات استخراج شده از وبگاه بورس،

امکان بهره‌برداری از ۳۸ داده وجود دارد. هم‌چنین باید اضافه کرد که این اوراق در حال معامله است و داده‌های استخراج شده، از ابتدای زمان انتشار اوراق تا پایان تیرماه ۱۴۰۰ است.

اکنون به سراغ مرحله شبیه‌سازی با استفاده از مدل پیشنهادی می‌رویم. لذا در وهله اول لازم است تا متغیّرها را در نرم‌افزار اکسل وارد نماییم. ابتدا حالت اول یعنی نرخ سود ثابت را بررسی نموده و سپس به سراغ حالت دوم می‌رویم:

- **حالت اول: نرخ سود ثابت**

همان‌طور که ذکر کردیم، عمر این اوراق ۴ساله است که داده‌ها را به‌صورت ماهانه درنظرگرفته‌ایم. پس در قدم اول داده‌های قیمت سهام شرکت ارتباطات سیار ایران را متناسب با بازه زمانی مدنظر که ذکر شد، از وبگاه بورس گرفته و سپس داده‌ها را از حالت روزانه به ماهانه تغییر داده و در ادامه بازدهی قیمت‌های ماهانه را محاسبه می‌کنیم و این داده‌ها را در یک ستون مشخص از اکسل قرار می‌دهیم. علاوه‌بر داده‌های سهم مدنظر، لازم است تا داده‌های مربوط به قیمت این اوراق را از وبگاه بورس گرفته و در یک ستون دیگر از اکسل وارد نماییم. محاسبه پارامترهای μ و σ نیز اهمیت زیادی دارد. همان‌طور که در بخش قبل ذکر کردیم، μ بیانگر میانگین بازدهی‌های قیمت سهام ماهانه است که طبق داده‌های واردشده، برابر ۰,۱۷ است. σ بیانگر انحراف معیار بازدهی‌های قیمت سهام ماهانه بوده که طبق داده‌های واردشده، برابر ۰,۰۱ است. نکته حائز اهمیت این است که این مقادیر محاسبه شده نیز متناسب با دوره زمانی در نظر گرفته شود و لازم است تا تبدیل موردنیاز انجام شود. ازجمله متغیّرهای مهم، r است که این نرخ در بیانیه ثبت ۱۶درصد سالیانه هست و لازم است تا به‌صورت ماهیانه درنظرگرفته شود. یکی دیگر از پارامترها، V_0 است که برابر یک میلیون ریال است.

ازجمله مهم‌ترین موارد دیگری که لازم است تعیین شود، dt و dx است. با توجه به اینکه داده‌های ما به‌صورت ماهانه است، لذا لازم است تا فاصله زمانی یا همان dt نیز

به‌صورت ماهانه درنظرگرفته شود. بنابراین مقدار dt برابر با ۰٫۰۸۳ است. جهت تعیین کردن dx، همان‌طور که در مقدمه بحث ذکر کردیم، از تابع NORM.INV در نرم‌افزار اکسل استفاده می‌کنیم. ورودی این تابع، Probability و Mean وStandard Deviation است. جهت وارد نمودن مقدار Probability، لازم است تا یک ستون دیگری به نام Rand ایجاد کرده و با استفاده از تابع Rand، مقادیری بین صفر و یک ایجاد می‌شود. مقدار Mean برابر صفر خواهد بود و مقدارStandard Deviation نیز برابر $\sqrt{dt}$ است. بنابراین تاکنون طبق توضیحات داده‌شده، ۵ ستون را باید تشکیل دهیم که شامل قیمت اوراق، بازده قیمت سهام پایه، اعداد تصادفی، زمان و dx است. لازم به ذکر است که تعداد اعداد و ارقام در هر ستون بستگی به تعداد داده‌ها دارد. در خصوص ستون زمان لازم به توضیح است که مقدار اول برابر صفر و مقدار دوم برابر مقدار اول به اضافه مقدارdt است و به همین صورت تا آنجایی که داده در اختیار داریم، این محاسبه را ادامه می‌دهیم.

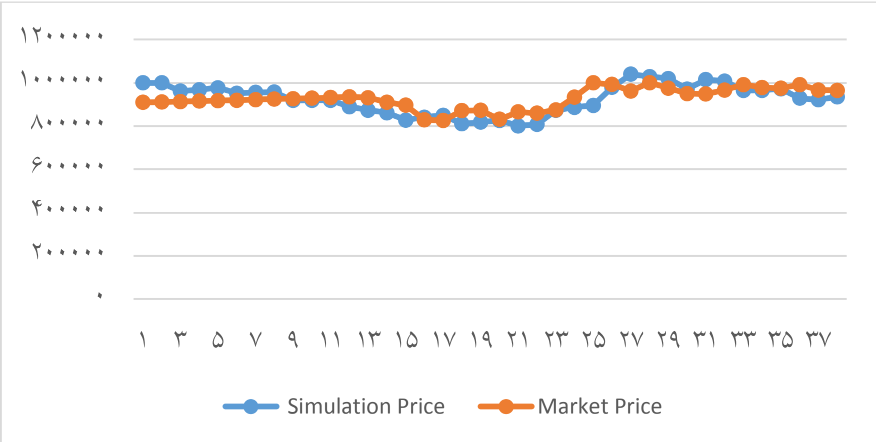
درنهایت به سراغ اصلی‌ترین و مهم‌ترین بخش از شبیه‌سازی می‌رویم که لازم است مدل پیشنهادی که بخش قبل ذکر شد را در نرم‌افزار اکسل وارد نماییم و مقداری که به دست می‌آید، درواقع قیمت شبیه‌سازی‌شده اوراق است که با در نظر گرفتن مفروضات توضیح داده‌شده صورت گرفته است.

همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، مدل پیشنهادی این پژوهش در حالت اول (نرخ سود ثابت) به‌صورت زیر است:

$$dv = \left[V_0 e^{(r+s)t}\left(r + s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 t^2 + rt + \mu st\right)\right] dt + \left(\sigma s V_0 t e^{(r+s)t}\right) dx \quad \text{رابطه (۴۵):}$$

از این رابطه، مواردی مانند r وσ وV_0 وμ وdt مقادیری معیّن دارند که توضیح داده شد و مواردی مانند dxو s وt در طول زمان تغییر پیدا می‌کند. رابطه V_1 برابر است با $V_0 + dv$ و V_2 برابر است با $V_1 + dv$ و به همین صورت تا V_{37} ادامه خواهد داشت.

در راستای انجام محاسبات فوق، یک نکته حائز اهمیت نیز وجود دارد و این نکته، تعدیل‌سازی قیمت شبیه‌سازی است. ازجمله مواردی که در خصوص تعدیل قیمت شبیه‌سازی شده لازم است موردبررسی قرار گیرد، درنظرگرفتن کوپن‌های این اوراق است که البته همان‌طور که ذکر شد، کوپن‌های این اوراق به‌صورت سه‌ماهه است. بدین‌معنی که هرسه‌ماه لازم است تا مقدار کوپن محاسبه‌شده از قیمت شبیه‌سازی کسر شود. لذا با انجام این عملیات و محاسبات مربوطه، به قیمت‌های شبیه‌سازی تعدیل‌شده دست پیدا خواهیم کرد. با مقایسه قیمت اوراق در بازار و قیمت شبیه‌سازی اوراق، نمودار آن به‌صورت زیر است:



نمودار (۱): مقایسه قیمت بازار و قیمت شبیه‌سازی اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام- نرخ سود ثابت

منبع: یافته‌های تحقیق

با توجه به نمودار (۱) می‌توان نتیجه‌گیری نمود که قیمت‌های شبیه‌سازی‌شده با قیمت‌های بازار مطابقت ندارد. این در حالی است که مدل پیشنهادی این پژوهش به واقعیت اقتصاد کشور نزدیک‌تر است و واقعیت‌های این اوراق را در نظر می‌گیرد که ازجمله مهم‌ترین آن می‌توان به دارایی پایه این نوع از اوراق اجاره اشاره کرد که کاملاً متفاوت از دارایی پایه اوراق اجاره معمولی است. بدین‌معنی که در اوراق اجاره مبتنی‌بر

سهام، دارایی پایه شفافیت دارد و می‌توان قیمت را به‌صورت روزانه و مستمر تعیین نمود درحالی‌که در اوراق اجاره معمولی به این صورت نیست. درواقع مدل قیمت‌گذاری فعلی اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام با مدل قیمت‌گذاری اوراق اجاره معمولی به یک شکل است درحالی‌که درواقع نباید به این صورت باشد.

- **حالت دوم: نرخ سود متغیّر و متناسب با عایدی سهام مورد اجاره**

روند شبیه‌سازی در حالت دوم (نرخ سود متغیّر) نسبت به حالت اول طولانی‌تر و بالتبع دقیق‌تر بوده و مطابقت بیشتری با ماهیت این نوع از اوراق اجاره دارد. همان‌طور که در بخش قبل ذکر کردیم، در این حالت، نرخ سود متناسب با عایدی سهام بوده و لازم است تا این نرخ به عایدی سهام مرتبط شود. برای انجام اینکار، ما نیازمند ساخت رابطه $\frac{e}{p}$ هستیم. این رابطه نشان‌گر نرخ سود اوراق مبتنی‌بر عایدی سهام مورد اجاره(r) است. بدین‌صورت که ابتدا لازم است تا سود خالص هر سهم(eps) را از گزارش‌های مالی استخراج کرده و سپس بر قیمت تقسیم کنیم. لازم به ذکر است که گزارش‌های مالی منتشر شده به‌صورت سه‌ماهه هستند و با توجه به اینکه داده‌های ما به‌صورت ماهانه است، لذا داده‌های سود خالص هر سهم را به‌صورت ماهانه تبدیل کرده و سپس بر قیمت محاسبه‌شده هرماه تقسیم می‌کنیم و جهت انجام محاسبات و استفاده از این نسبت، یک ستونی را در اکسل به آن اختصاص می‌دهیم.

مورد دیگری که در این قسمت حائز اهمیت است، محاسبه σ_r و μ_r است. همان‌طور که ذکر شد، رابطه $\frac{e}{p}$ بیانگر نرخ سود اوراق است که جهت محاسبه μ_r، باید میانگین این اعداد محاسبه شده و در ادامه جهت محاسبه σ_r لازم است تا انحراف معیار این اعداد نیز محاسبه شود. با انجام این محاسبات، μ_r برابر با ۰،۰۱۲ و σ_r برابر با ۰،۰۰۶۵ است. لازم به ذکر است که این اعداد نیز با توجه به ماهانه بودن اعداد دیگر، باید متناسب با هرماه در نظر گرفته شود. این دو پارامتر همانند σ_s و μ_s به‌صورت ثابت برای محاسبه قیمت هرماه درنظرگرفته می‌شود.

از دیگر مواردی که در این حالت نسبت به حالت قبل افزوده می‌شود، اعداد تصادفی است که در حالت اول ما تنها dx_1 را شاهد بودیم. لکن در این حالت با توجه به رابطه زیر که در بخش قبل استخراج کردیم، یک ستون اعداد تصادفی دیگر نیز اضافه شده و همچنین یک ستون دیگری به نام dx_2 تشکیل می‌دهیم.

رابطه (۴۶):

$$dv = \left[V_{\circ}e^{(r+s)t}\left(r + s + \frac{1}{2}{\sigma_s}^2 s^2 t^2 + \frac{1}{2}{\sigma_r}^2 r^2 t^2 + \rho\sigma_s s\sigma_r r t^2 + \mu_r r t + \mu_s s t\right)\right] dt + \left(\sigma_s s V_{\circ} t e^{(r+s)t}\right) dx_1 + \left(\sigma_r r V_{\circ} t e^{(r+s)t}\right) dx_2$$

با توجه به رابطه فوق، محاسبه ρ از دیگر مواردی است که نیازمند توجه است. بدین‌صورت که با استفاده از تابع correlation در اکسل، محاسبه مربوط به آن را انجام می‌دهیم و مقدار آن برابر ۰,۱۰۹− است. بنابراین طبق مفروضات و متغیّرها و پارامترهای ذکرشده، در رابطه فوق محاسبات مربوطه انجام می‌شود. رابطه V_1 برابر است با $V_{\circ} + dv$ و V_2 برابر است با $V_1 + dv$ و به همین صورت تا V_{37} ادامه خواهد داشت.

تعدیل‌سازی قیمت شبیه‌سازی‌شده در این بخش نیز باید موردبررسی قرار گیرد. بدین‌صورت که لازم است تا کوپن‌های این اوراق که به‌صورت ۳ ماهه است در نظر گرفته شود. بدین‌معنی که هرسه‌ماه لازم است تا مقدار کوپن محاسبه‌شده از قیمت شبیه‌سازی کسر شود. لذا با انجام این عملیات و محاسبات مربوط به آن، به قیمت‌های شبیه‌سازی تعدیل شده دست پیدا خواهیم کرد. با مقایسه قیمت اوراق در بازار و قیمت شبیه‌سازی اوراق، نمودار آن به‌صورت زیر است:

نمودار (۲): مقایسه قیمت بازار و قیمت شبیه‌سازی اوراق اجاره مبتنی برسهام-نرخ سود متغیّر

منبع: یافته‌های تحقیق

با توجه به نمودار (۲) می‌توان نتیجه‌گیری نمود که قیمت‌های شبیه‌سازی شده با قیمت‌های بازار مطابقت ندارد. این در حالی است که مدل پیشنهادی به واقعیت اقتصاد کشور نزدیک‌تر بوده و به جهت اسلامی نیز واقعی‌تر است و واقعیت‌ها و ماهیت این اوراق را درنظرمی‌گیرد که ازجمله مهم‌ترین این‌ها می‌توان به دارایی پایه این نوع از اوراق اجاره اشاره کرد که کاملاً متفاوت از دارایی پایه اوراق اجاره معمولی است. بدین‌معنی که در اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام، دارایی پایه شفافیت دارد و می‌توان قیمت را به‌صورت روزانه و مستمر تعیین نمود، درحالی‌که در اوراق اجاره معمولی به این صورت نیست. همچنین شایان ذکر است که این مدل پیشنهادی به جهت تغییرات قیمتی، برگ خرید بیشتری را مدنظر قرار می‌دهد. لازم به ذکر است که مدل قیمت‌گذاری فعلی اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام با مدل قیمت‌گذاری اوراق اجاره معمولی به یک شکل است. درحالی‌که در این پژوهش بیان کردیم که نباید به این صورت باشد. همچنین باید اشاره کرد، تفاوتی که نسبت به قیمت‌های شبیه‌سازی‌شده در حالت اول دارد این است که مفروضات دقیق‌تر و کامل‌تر و متناسب با ماهیت این اوراق نیز در مدل پیشنهادی درج شده است. بدین‌صورت که نرخ اجاره‌بها متناسب با عایدی سهام مورد اجاره است.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

انتشار اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام یکی از دستاوردهای بازار سرمایه در سال‌های اخیر بوده و درواقع نسل دوم اوراق اجاره و مبتنی‌بر دارایی‌های مالی است و ازجمله بحث‌های جدید اوراق تأمین مالی به‌شمار می‌رود و با توجه به ویژگی‌هایی که دارد پیش‌بینی می‌شود استفاده از آن به سرعت توسعه یابد. این اوراق از این جهت دارای اهمیت بوده که دارایی پایه آن شفاف و قابل‌مبادله در بازار است و قیمت آن به‌صورت مستمر قابل اندازه‌گیری است. پس دارندگان اوراق باید بتوانند از مهم‌ترین حقوق مالکیتی خود یعنی واگذاری اوراق به قیمت روز بهره‌مند شوند. اما متأسفانه آنچه در

طراحی و به‌کارگیری این اوراق مشاهده می‌شود این است که تفاوتی در قیمت‌گذاری و فرایند مبادله این اوراق با اوراق صکوک معمولی وجود ندارد که باید موردارزیابی قرار گیرد و تاکنون پژوهشی به‌طور خاص جهت ارائه مدل ارزش‌گذاری این اوراق با توجه به ماهیت آن صورت نگرفته است. همچنین لازم به ذکر است که متأسفانه شرایط انتشار این اوراق دقیقاً مشابه با اوراق صکوک معمولی است یعنی دارای نرخ سود کاملاً ثابت بوده و در سررسید نیز با قیمت اسمی بازخرید می‌شوند و تغییرات قیمت دارایی پایه در ارزش اوراق هیچ تأثیری ندارد.

آرزوی خیلی از محققین و پژوهشگران، این بوده است که دارایی پایه ما یک دارایی باشد تا ما هر لحظه قادر باشیم نظاره‌گر قیمت آن باشیم. علت این امر این است که در اوراق اجاره معمولی، ما یک دستگاه یا تجهیزاتی را اجاره می‌دهیم که اصلاً قیمت آن مشخص و معلوم نیست، اما زمانی که سهام را به‌عنوان دارایی پایه قرار می‌دهیم، هر لحظه می‌توانیم قیمت آن را مشاهده کنیم و قیمت مشخص است. بنابراین لازم است تا در خصوص ارزش‌گذاری این نوع از اوراق اجاره نیز مدلی ارائه شود و قیمت‌گذاری فعلی این اوراق متناسب با ماهیت اوراق نیست و نیازمند اصلاح است. در این راستا باید اضافه کنیم که نرخ اجاره‌بها یا همان نرخ سود اوراق اجاره سهام به‌صورت نرخ ثابت و معیّن برای انواع و اقسام سهام نخواهد بود و بلکه لازم است تا نرخی متناسب با عایدی سهام مورد اجاره تعیین شود. همچنین باید اشاره کرد که منافعی مانند سود تقسیمی ناشی از سهام به مستأجر منتقل خواهد شد و در تعیین نرخ اجاره‌بها نیز تأثیرگذار خواهد بود و منافعی مانند سود ناشی از نوسان قیمت سهام و حق رأی و حق تقدم در اختیار مالک(موجر) خواهد بود و در تعیین قیمت اوراق نیز مؤثر است. بنابراین با درنظرگرفتن این مفروضات و ارائه مدل پیشنهادی مبتنی‌بر ریاضیات تصادفی و استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو، با قیمت‌های بازار مقایسه شده و

مشاهده می‌شود که قیمت‌های شبیه‌سازی با استفاده از مدل پیشنهادی، با قیمت‌های بازار متفاوت است.

در پایان لازم به ذکر است که با توجه به فروضات مطرح شده، درصورتی‌که مدل پیشنهاد ارزش‌گذاری مدنظر قرار گیرد، اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام ابزار مناسبی برای بازار سرمایه در داخل کشورهای اسلامی خواهد بود و نسبت به وضعیت فعلی انتشار آن، برتری و رشد چشم‌گیری خواهد داشت.

یادداشت‌ها

1. Mallier & Alobaidi
2 .Random Walk
3. Wajdi Dusuki
4. Isa & Shafie
5. Sheldon Lin & Tan
6. Annuities
7. Brennan & Xia
8. Trend
9. Volatilities
10. Diffiusion
11. Jump
12. Jump-Diffiusion
13. Information Component
14. Event
15. Convertible Bond
16. Wilmott
17. Lognormal
18. Exponential Function
19. Monte Carlo
20. Bootstrapping

کتابنامه

اعتصامی، امیرحسین؛ و سعدی، حسینعلی (۱۳۹۹). امکان‌سنجی فقهی- حقوقی اجاره سهام و کاربردهای مالی آن. *دو فصلنامه مطالعات اقتصاد اسلامی*، ۱۲(۲۴)، ۹۵-۱۳۵.

جلوداری، محمد (۱۳۹۹). درآمدی بر ریاضیات مالی. *فصلنامه فرهنگ و اندیشه ریاضی*. ۳۹(۶۶)، ۷-۴۰.

صالح‌آبادی، علی؛ میرطاهر، سیدمحمدجواد؛ فدایی‌واحد، میثم؛ و علی‌حسینی، مهدی (۱۳۹۲). مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق مالی اسلامی اجاره. *فصلنامه اقتصاد اسلامی*، ۱۳(۴۹)، ۱۱۵-۱۳۷.

صادقی، کوروش (۱۳۹۷). *مدل‌سازی مالی و سرمایه‌گذاری در اکسل*. تهران: چالش.

کاوند، مجتبی (۱۳۹۷). *بررسی فقهی اوراق اجاره مبتنی‌بر سهام*. تهران: مرکز پژوهش و توسعه و مطالعات اسلامی سازمان بورس و اوراق بهادار.

Brennan, M. J., & Xia, Y. (2000). Stochastic Interest Rates and the Bond-Stock mix. *Review of Finance*, *4*(2), 197-210.

Etesami, A, H., & Sadi, H, A., (2019). Jurisprudential Feasibility Study of Stock Leasing and its Financial Applications. *Bi-Quarterly Journal of Islamic Economic Studies,* Year 12, NO.2 (24 Consecutive), Spring and Summer, 95-135. (In Persian)

Isa, Z., & Shafie, N. A. (2017). A Stochastic Approach for Determining Profit Rate of Islamic Financing Products. *International Journal of Economics and Financial Issues*, *7*(1), 154-163.

Kavand, M., (2018). Jurisprudential Study of Ijarah Sukuk Based on Equity. *Center for Research and Development and Islamic Studies of the Stock Exchange and Securities Organization (Markets and Financial Instruments Group).* (In Persian)

Jelodari, M., (2019). An Introduction to Financial Mathematics. Mathematical Culture and Thought. 36(66), 7-40. (In Persian)

Sadeghi, K., (2018). Financial Modeling and Investment in Excel. Tehran: Challenge Publishing. (In Persian)

Salehabadi,A; Mirtaher, S, M, J; Fadaie Vahed, M; & Ali Hosseini, M., (2013). Models for Valuing Islamic Ijarah Sukuk. *Scientific-Research Quarterly of Islamic Economics*, 13(49), 115-137. (In Persian)

Sheldon Lin, X., & Tan, K. S. (2003). Valuation of Equity-Indexed Annuities Under Stochastic Interest Rates. *North American Actuarial Journal*, *7*(4), 72-91.

Mallier .R, & Alobaidi .G (2002). Pricing Equity-Linked Debt Using The Vasicek Model; *Acta Math. Univ. Comenianae*. Vol. LXXI, 2, 211–220.

Dusuki, A. W. (2010). Do equity-based Sukuk structures in Islamic capital markets manifest the objectives of Shariah??. *Journal of Financial Services Marketing*, *15*, 203-214.

Wilmott, P. (2013). *Paul Wilmott on quantitative finance*. John Wiley & Sons.